

Thèse no 95 (1969)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE



DIVISION DE FRÉQUENCE PAR ASSERVISSEMENT DE PHASE

THÈSE

présentée à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
pour l'obtention du grade
de docteur ès sciences techniques
par

Eric VITTOZ

Ingénieur électricien diplômé EPUL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Vu le rapport présenté par le jury d'examen, composé de
MM. les Professeurs R. Dessoulavy et A. Roch (EPF de Lausanne)
et de M. J. Gilbert (Sulzer Frères S.A., Winterthur), l'Ecole
Polytechnique Fédérale de Lausanne autorise l'impression de
la thèse N° 95 de

Monsieur Eric VITTOZ

intitulée

DIVISION DE FRÉQUENCE PAR ASSERVISSEMENT DE PHASE



Au nom de
l'Ecole Polytechnique
Fédérale de Lausanne

Le Directeur
(signé) M. Cosandey

Lausanne, le 23 mai 1969

A mes parents

A ma femme

INTRODUCTION

Le rôle du diviseur de fréquence dans un garde-temps électronique consiste à ramener la fréquence relativement élevée de la base de temps (quelques kilohertz au minimum pour un oscillateur à quartz) à une valeur basse convenant au système d'affichage. Cette fonction doit être réalisée avec un minimum de consommation de puissance afin d'assurer une autonomie suffisante de l'appareil, compte tenu du volume à disposition pour la source d'énergie: la puissance disponible passe de quelques milliwatts pour un chronomètre de marine à quelques microwatts pour une montre-bracelet.

Un diviseur de fréquence doit obligatoirement contenir, sous une forme ou une autre, une consigne fixant le rapport de division désiré. Dans les systèmes utilisés habituellement, cette consigne est donnée soit par la structure du circuit, soit par les valeurs numériques de certains éléments.

Dans la première catégorie, on trouve les diviseurs logiques, tels que les flips-flops à entrée unique [1] et les compteurs en anneau [1], [2]. Le nombre de composants nécessaires augmente au moins avec le logarithme du rapport de division.

La seconde catégorie est représentée entre autres par les oscillateurs sinusoïdaux synchronisés [3], [4], [5], [6], les circuits à relaxation synchronisés [7 chap.16], [8], les diviseurs à régénération [5], [9], [7 chap.15] et les diviseurs à accumulation [7 chap.17], [10], [11]. La marge de tolérance des éléments fixant le rapport de division est inversement proportionnelle au facteur de division d'un étage.

Les oscillateurs asservis en phase par une boucle de réglage (APC, automatic phase control) sont communément utilisés dans les installations de télécommunications spatiales [12]. Lorsque le système détecteur de phase travaille en régime impulsif, ou échantillonné, [13], [14], un tel asservissement permet d'obtenir une division de fréquence [5] avec un rapport qui n'est fixé ni par la structure du circuit, ni par la valeur numérique

des éléments, mais par les conditions initiales de fonctionnement imposées au circuit.

On peut de ce fait obtenir un rapport de division élevé au moyen d'un petit nombre de composants sans tolérances exagérées et choisir ce rapport à l'intérieur d'une certaine plage sans qu'il soit nécessaire de modifier quoi que ce soit au circuit.

L'inconvénient de ce système réside dans le fait que la consigne de division imposée initialement risque d'être détruite par une perturbation trop importante.

Le but de cette étude est la détermination du rapport de division maximum que peut atteindre un tel système, ainsi que des différents facteurs responsables de cette limitation.

Dans une première partie, on analysera et optimisera ce diviseur qui constitue une boucle d'asservissement non-linéaire et échantillonnée, du deuxième ordre pour la version simple, du troisième ordre pour la version plus évoluée; on examinera quantitativement l'influence des divers types de perturbations pouvant intervenir dans une application à un garde-temps, en particulier l'influence des fluctuations aléatoires de la phase de l'oscillateur asservi qui représentent une source de bruit. Ceci conduira à l'analyse détaillée du multivibrateur astable, qui constitue un oscillateur bien adapté à cette application, analyse entre autres du processus de commutation intervenant dans un tel circuit, et des paramètres influençant les fluctuations de l'instant de cette commutation (en anglais "jitter").

Dans la seconde partie, les différents résultats théoriques seront contrôlés à l'aide d'une réalisation pratique travaillant au niveau de puissance de quelques microwatts dont on donnera un exemple de dimensionnement final.

Ce travail a été entrepris dans le cadre du programme de recherches du Centre Electronique Horloger S.A. à Neuchâtel, dont je tiens à remercier vivement la Direction et les collaborateurs pour leur soutien.

TABLE DES MATIERES

Partie théorique

1. Principe du système
2. Boucle d'asservissement du deuxième ordre
 - 2.1 Introduction
 - 2.2 Approximation linéaire
 - 2.2.1 Fonction de transfert de la boucle ouverte
 - 2.2.2 Stabilité
 - 2.2.3 Fonction de transfert du système bouclé
 - 2.2.4 Réponse indicielle
 - 2.2.5 Bruit
 - 2.3 Approximation continue
 - 2.3.1 Equation du système
 - 2.3.2 Domaine d'entraînement
 - 2.3.3 Domaine de capture
 - 2.3.4 Trajectoires dans l'espace de phase
 - 2.3.5 Mise en synchronisme (crochage)
 - 2.3.6 Saut de phase maximum
 - 2.3.7 Approximation linéaire continue
3. Boucle d'asservissement du troisième ordre
 - 3.1 Introduction
 - 3.2 Approximation continue
 - 3.2.1 Approximation continue linéaire
 - 3.2.2 Equation du système non-linéaire
 - 3.2.3 Réponse à une rampe de fréquence
 - 3.3 Approximation linéaire
 - 3.3.1 Fonction de transfert de la boucle ouverte
 - 3.3.2 Stabilité
 - 3.3.3 Fonction de transfert du système bouclé
 - 3.3.4 Correspondance entre paramètres
 - 3.3.5 Optimisation des paramètres
 - 3.4 Equation du système échantillonné non-linéaire

- 4. Limites des perturbations admissibles
 - 4.1 Introduction
 - 4.2 Saut de phase isolé
 - 4.3 Saut d'amplitude du signal d'entrée
 - 4.4 Variations de température
 - 4.4.1 Effet sur la fréquence libre
 - 4.4.2 Effet sur les capacités du filtre
 - 4.5 Bruit
 - 4.5.1 Introduction
 - 4.5.2 Estimation de la probabilité de décrochage
 - 4.5.3 Statistique du nombre de périodes avant décrochage
- 5. Etude du multivibrateur
 - 5.1 Introduction
 - 5.2 Fréquence d'oscillation et conditions de fonctionnement correct
 - 5.3 Calcul de l'état métastable
 - 5.3.1 Equations des transistors
 - 5.3.2 Etat métastable
 - 5.4 Calcul des tensions V_1 , V_2 et V_3
 - 5.5 Caractéristique de réglage
 - 5.6 Influence de la température
 - 5.7 Analyse du processus de commutation
 - 5.7.1 Circuit équivalent et équation de commutation
 - 5.7.2 Solution graphique
 - 5.7.3 Solution analytique
 - 5.7.4 Retard de commutation du multivibrateur
 - 5.7.5 Temps de commutation
 - 5.8 Fluctuations statistiques de la période (jitter)
 - 5.8.1 Circuit équivalent
 - 5.8.2 Ecart-type des fluctuations
 - 5.8.3 Application au multivibrateur

Partie expérimentale

- 6. Mesure du multivibrateur
 - 6.1 Circuit mesuré
 - 6.2 Etat métastable et tensions V_1 , V_2 , V_3

- 6.3 Caractéristique de réglage
- 6.4 Influence de la température
- 6.5 Caractéristique de commutation
- 6.6 Temps de retard et temps de commutation
- 6.7 Fluctuations de la période
 - 6.7.1 Influence de la tension d'alimentation
 - 6.7.2 Influence de la capacité parasite
 - 6.7.3 Influence des capacités de relaxation
 - 6.7.4 Influence du niveau de courant
- 7. Réalisation et mesure d'un circuit diviseur
 - 7.1 Circuit réalisé
 - 7.2 Caractéristique de réglage
 - 7.3 Influence de la température sur la fréquence libre
 - 7.4 Influence de la tension d'alimentation sur la fréquence libre
 - 7.5 Constante de temps τ
 - 7.6 Domaine d'entraînement
 - 7.7 Limite de stabilité
 - 7.8 Réponse indicielle
 - 7.9 Saut de phase maximum
 - 7.10 Saut d'amplitude maximum
 - 7.11 Bruit
 - 7.12 Probabilité de décrochage
 - 7.13 Exemple de dimensionnement final du diviseur
- 8. Conclusions
 - Appendices
 - Glossaire des symboles principaux
 - Références

PARTIE THEORIQUE

1. PRINCIPE DU SYSTEME

Le principe de division de fréquence par asservissement de phase [5] est illustré par la figure 1.1.

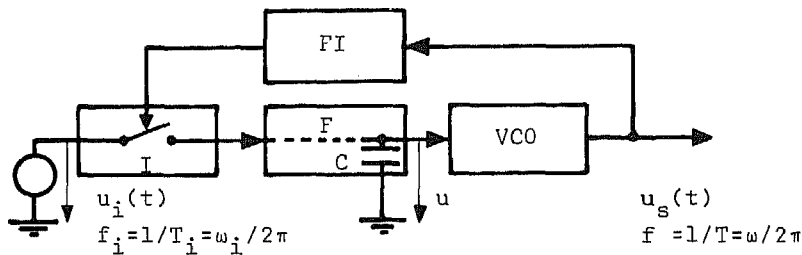


Fig.1.1 Principe du diviseur

Soit $f_i = \omega_i/2\pi$ la fréquence du signal d'entrée $u_i(t)$ qu'on supposera sinusoïdal (bien que d'autres formes soient possibles), donc donné par la relation

$$u_i(t) = U_i \sin \omega_i t \quad 1.1$$

On désire obtenir à la sortie du dispositif un signal $u_s(t)$ périodique dont la fréquence fondamentale f soit un sous-multiple N entier de f_i .

Ce signal $u_s(t)$ est généré par l'oscillateur VCO (Voltage Controlled Oscillator) dont la fréquence est réglable à l'aide d'une tension u . On admettra une relation linéaire entre f et u , soit

$$\omega = 2\pi f = \omega_{00} + ku \quad 1.2$$

ω_{00} étant la pulsation de l'oscillateur lorsque $u = 0$; on supposera que k est positif.

Un circuit de mise en forme FI produit des impulsions de durée T_e courtes par rapport à $T_i = 1/f_i$, et synchrones avec le signal de sortie. Ces impulsions commandent la fermeture d'un interrupteur électronique I qui applique pendant la durée T_e la tension $u_i(t)$ à l'entrée d'un filtre passe-bas F.

La tension de sortie u de ce filtre, apparaissant aux bornes d'une capacité de maintien C , est utilisée pour régler la fréquence de l'oscillateur VCO; on supposera que le courant de réglage fourni par C est négligeable.

La fréquence angulaire de battement entre le signal d'entrée et la N ième harmonique du signal de sortie peut s'exprimer par la relation

$$\dot{\varphi} = \omega_i - N\omega \quad 1.3$$

φ étant une phase relative définie pour l'instant à une constante près.

Si la fréquence de sortie f prend une valeur constante f_0 égale à un sous-multiple entier N de la fréquence d'entrée f_i (c'est-à-dire si chaque période $T_0 = 1/f_0$ comprend un nombre entier de périodes $T_i = 1/f_i$), la relation 1.3 montre que φ est alors constante.

Tous les échantillons de $u_i(t)$ prélevés par l'interrupteur I sont alors identiques. La tension u prend par conséquent une valeur constante égale à la valeur moyenne de ces échantillons.

Si ω_i n'est pas trop différent de $N\omega_{00}$, il existe des valeurs d'équilibre φ_0 de la phase telles que la tension de réglage u prend précisément la valeur u_0 nécessaire pour imposer la fréquence f_0 de l'oscillateur, donc

$$\omega_0 = \omega_i / N = \omega_{00} + k u_0 \quad 1.4$$

Une telle situation d'équilibre est illustrée en traits continus à la figure 1.2.

Si une perturbation avance le n ième instant d'échantillonnage (même figure, traits discontinus), la tension de réglage u tend à baisser, entraînant une baisse de ω (car k est positif) donc une augmentation de la période T ayant tendance à corriger l'effet de la perturbation. Cet équilibre peut donc être stable si les corrections ne sont pas trop fortes.

Par contre, les points d'équilibre correspondant à des échantillonnages de $u_i(t)$ durant ses demi-périodes de décroissance sont instables.

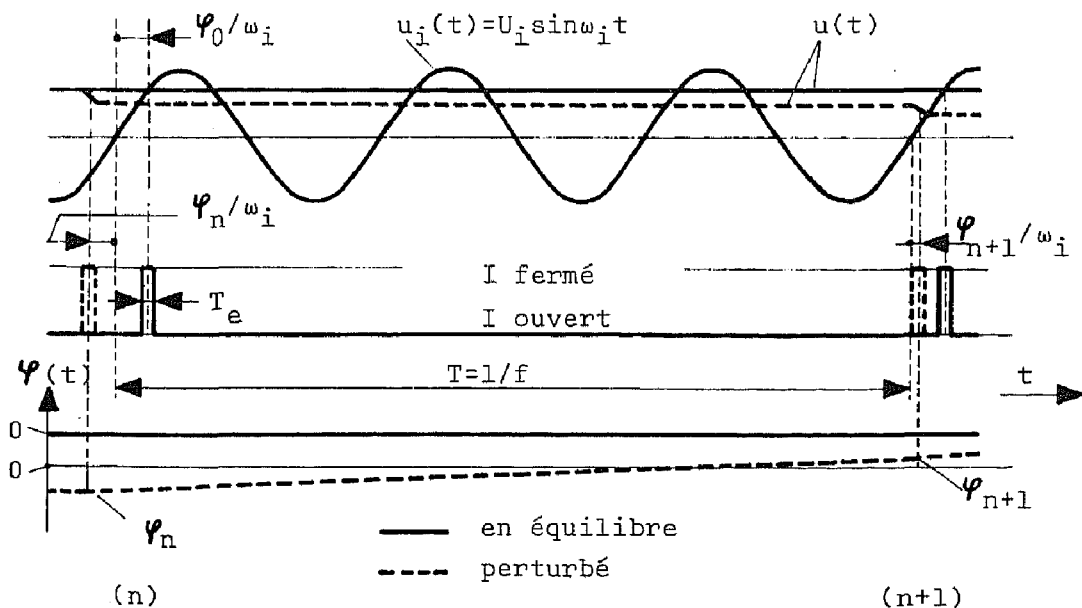


Fig.1.2 Diviseur croché sur $N = 3$

Comme le montre cette même figure, φ_0 sera par définition le retard de phase du milieu de l'impulsion d'échantillonnage par rapport au plus proche passage par zéro de $u_i(t)$ en situation d'équilibre stable. Cette phase d'équilibre est toujours comprise entre $+\pi/2$ et $-\pi/2$.

La relation 1.4 montre que u_0 est nulle lorsque $\omega_i = N\omega_{00}$. L'échantillonnage se produit alors au passage de $u_i(t)$ par zéro et φ_0 est nulle.

A chaque saut de phase égal à un multiple entier de 2π survenant entre deux échantillonnages correspond une nouvelle situation d'équilibre (établie instantanément) qu'il peut être nécessaire de distinguer de l'équilibre initial.

Lorsque l'équilibre est perturbé, la phase φ est le retard de phase du milieu de l'impulsion d'échantillonnage par rapport à l'origine de φ_0 . Cette phase n'est définie qu'aux instants d'échantillonnage $n, n+1, \dots$ où elle prend les valeurs $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots$

On verra que la constante de temps du filtre passe-bas doit être très supérieure à la durée T_e . L'échantillonnage de la tension d'entrée $u_i(t)$ par l'interrupteur I peut être assimi-

lé à une détection du sinus de la phase φ , délivrant des échantillons de tension de valeur égale à la moyenne u_E de $u_i(t)$ pendant le temps T_e de fermeture de l'interrupteur:

$$u_E = \frac{T_i}{2\pi T_e} \int_{\varphi - \pi T_e / T_i}^{\varphi + \pi T_e / T_i} U_i \sin \omega_i t \cdot d(\omega_i t)$$

donc $u_E = U_i' \sin \varphi$ 1.5

avec $U_i' = \frac{\sin(\pi T_e / T_i)}{\pi T_e / T_i} \cdot U_i$ 1.6

Pour un rapport de division N grand, on peut admettre

$$T_e \ll T$$
 1.7

L'ensemble de la figure 1.1 constitue une boucle de réglage dont le schéma fonctionnel est représenté à la figure 1.3.

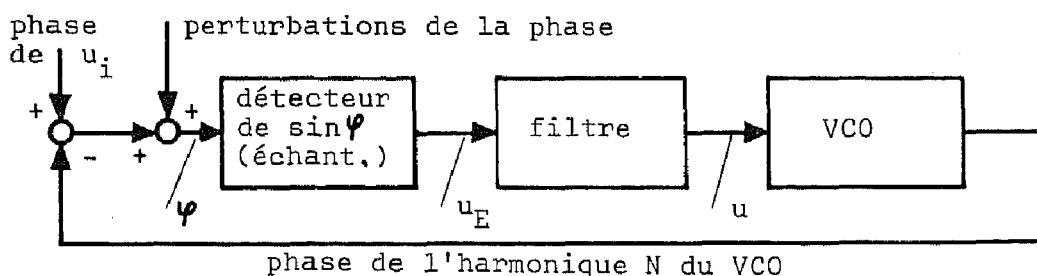


Fig.1.3 Schéma fonctionnel de l'asservissement

Cet asservissement est non-linéaire à cause de la relation sinusoïdale entre φ et u_E ; il est échantillonné puisque la détection de phase est effectuée de façon discrète, une fois par période de l'oscillateur VCO.

Il peut être considéré comme linéaire lors de l'étude de la stabilité ou de l'effet de petites perturbations, et continu si on s'intéresse à l'influence de perturbations lentes, agissant au cours d'un grand nombre de périodes, mais d'effet négligeable sur une seule période.

On verra qu'il est possible de ramener tous les types de perturbations à considérer à des perturbations équivalentes de la phase, injectées dans le système à l'entrée du détecteur de phase, comme le montre le schéma fonctionnel.

BOUCLE D'ASSERVISSEMENT DU DEUXIEME ORDRE

2.1 Introduction

Ce chapitre traitant de la boucle du deuxième ordre (c'est-à-dire à 2 degrés de liberté) tient lieu d'introduction à l'analyse du système du troisième ordre, nécessaire comme on le montrera pour atteindre un rapport de division élevé en asservissant un oscillateur peu stable. Il est basé en partie sur la référence [13] pour ce qui concerne l'approximation linéaire du système.

Le filtre passe-bas le plus simple est le filtre du premier ordre représenté à la figure 2.1 en liaison avec l'interrupteur d'échantillonnage I.

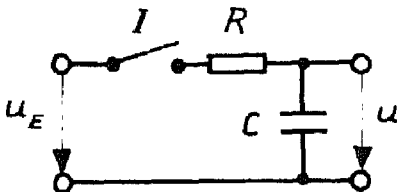


Fig.2.1 Echantillonneur-filtre du premier ordre

On a vu au chapitre précédent que le signal d'entrée de ce filtre est formé d'une suite d'échantillons de tension d'amplitude u_E (moyenne de $u_1(t)$ pendant l'échantillonnage) et de durée T_e .

2.2 Approximation linéaire.

2.2.1 Fonction de transfert de la boucle ouverte

Pour de petits écarts autour de la phase d'équilibre, la relation sinusoïdale 1.5 entre φ et u_E peut être linéarisée. Le système est alors entièrement linéaire et on peut calculer la fonction de transfert de la boucle, ouverte à l'entrée du filtre ou du détecteur de phase. Comme on a affaire à des variables discrètes, on utilisera la transformation en z .

Rappelons que la transformée en z d'une suite formée par échantillonnage périodique d'une fonction $x(t)$ (nulle pour $t < 0$) est donnée par la relation

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad 2.1$$

où $x_n = x(nT)$, T étant la période d'échantillonnage.

La variable z est liée à la variable de Laplace s par

$$z = e^{sT} \quad 2.2$$

La définition 2.1 n'est valable en toute rigueur que dans le cas d'un échantillonnage idéal, produisant une suite d'impulsions de durée nulle et de surface x_n . Nous l'appliquerons au cas de l'échantillonnage réel, de durée $T_e \ll T$ non nulle, en définissant x_n comme étant l'amplitude de l'impulsion délivrée par l'échantillonneur au temps $t = nT$. Avec cette définition inhabituelle de la transformée en z , la fonction de transfert du système échantillonné sera la transformée en z de sa réponse à un échantillon d'amplitude unité en $t = 0$ (dont la transformée en z est égale à 1).

En pratique, on calculera d'abord la transformée en s de cette réponse avant échantillonnage, à partir de laquelle des tables permettent de déterminer facilement la transformée en z de la réponse échantillonnée.

La réponse $u(t)$ du filtre de la figure 2.1 à cet échantillon unité unique est représentée à la figure 2.2.

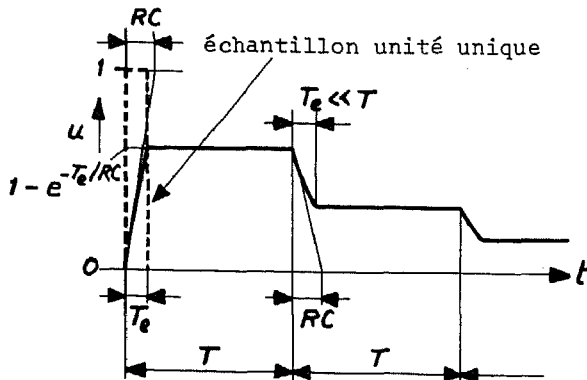


Fig. 2.2 Réponse du filtre à un échantillon unité unique

On peut définir un facteur de rétention [13]

$$r = e^{-T_e/RC} \quad 2.3$$

Pour $T \gg T_e$, la transformée en s de la réponse $u(t)$ est

$$U(s) = \frac{1-r}{s} (1 - e^{-sT}) (1 + re^{-sT} + r^2 e^{-2sT} + \dots) \quad 2.4$$

donc, après sommation de la série infinie

$$U(s) = \frac{1-r}{s} \cdot \frac{e^{sT}-1}{e^{sT}-r} \quad 2.5$$

où T peut être considérée comme constante (N élevé, petite perturbation de la phase).

La fonction de transfert G_o de l'ensemble oscillateur-comparateur de phase se calcule à partir des relations 1.2 et 1.3, sachant que

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{d\varphi}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{du}$$

Comme l'intégration dans le temps correspond à une division par s, on obtient

$$G_o = - \frac{kN}{s} \quad 2.6$$

La fonction de transfert du détecteur

$$G_d = \frac{du_E}{d\varphi} \quad 2.7$$

calculée autour de la phase d'équilibre φ_0 est une constante:

$$G_d = U_i! \cos \varphi_0 \quad 2.8$$

La réponse de la boucle ouverte avant échantillonnage a pour transformée en s

$$G_d G_o U(s) = - \frac{K(1-r)(e^{sT}-1)}{s^2(e^{sT}-r)} \quad 2.9$$

avec $K = kNU_i! \cos \varphi_0 \quad 2.10$

gain par unité de temps de la boucle ouverte sans filtre, dont la valeur maximum

$$K_m = kNU_i! \quad 2.11$$

représente l'écart maximum de la pulsation d'entrée ω_i par

rapport à Nw_{00} en synchronisme (voir relation 2.51).

Pour obtenir la transformée en z de cette réponse, égale à la fonction de transfert $G(z)$ de la boucle ouverte, on remplace dans 2.9 les termes en e^{sT} par z et les fonctions rationnelles de s par leurs correspondantes en z tirées des tables (voir par exemple [15] p.588 et suivantes).

A $1/s^2$ correspond $Tz^{-1}/(1-z^{-1})^2$; en sortant le signe négatif selon la terminologie usuelle, on obtient

$$G(z) = (1-r)KT \frac{z}{(z-r)(z-1)} \quad 2.12$$

La fonction de transfert de la boucle ouverte $G(z)$ possède 1 pôle en $z = 1$; il s'agit donc d'un asservissement échantillonné du type 1 [15, p. 268] ou PI (proportionnel à l'intégrale) dont l'erreur de "position" (écart statique après un saut unité) est nulle.

2.2.2 Stabilité

L'asservissement n'est stable que si les pôles de la fonction de transfert en z du système bouclé sont à l'intérieur du cercle unité [15, p. 231], donc si les zéros de l'équation caractéristique

$$1+G(z) = 0 \quad 2.13$$

ont un module inférieur à 1. Cette condition peut être analysée directement à l'aide du critère de Schur-Cohn [15, p.238] qui est d'un emploi assez peu commode. Il est plus simple d'introduire une nouvelle variable

$$w = \frac{z+1}{z-1} \quad 2.14$$

qui fait correspondre l'intérieur du cercle unité du plan de z au demi-plan des valeurs réelles négatives de w .

Ceci permet d'utiliser le critère de Routh-Hurwitz [15,p.23] appliqué à l'équation caractéristique en w .

A l'aide de 2.12, l'équation 2.13 devient

$$z^2 + z(KT(1-r) - (1+r)) + r = 0 \quad 2.15$$

d'où par le changement de variable 2.14

$$w^2 KT(1-r) + 2w(1-r) + 2(1+r) - KT(1-r) = 0 \quad 2.16$$

Le critère de Routh-Hurwitz donne alors

$$K > 0 \quad 2.17$$

$$KT < \frac{2(1+r)}{1-r} \quad 2.18$$

La première condition exprime simplement le fait que le signe du gain de la boucle ouverte doit être correct (en fait, avec un signal de référence sinusoïdal, le signe du gain peut être inversé en décalant de π l'angle d'équilibre φ_0 , ce qui change le signe de $\cos \varphi_0$ dans 2.10); elle existerait aussi si l'asservissement était continu. La seconde condition par contre est liée au caractère échantillonné du système.

2.2.3 Fonction de transfert du système bouclé

Le système bouclé peut être représenté par l'un des schémas de la figure 2.3

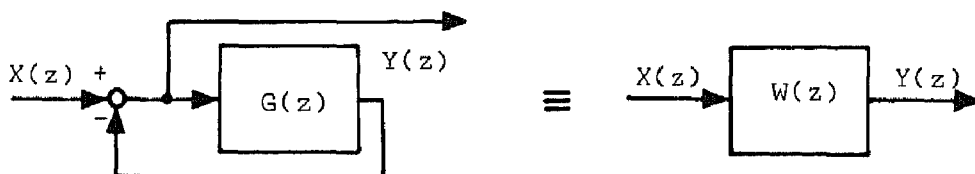


Fig.2.3 Système bouclé

Une suite de perturbations de phase x_n de transformée en z $X(z)$ provoque une suite d'écarts de phase y_n de transformée

$Y(z)$ donnée par

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+G(z)} = W(z) \quad 2.19$$

En introduisant l'expression de $G(z)$ 2.12:

$$W(z) = \frac{z^2 - (1+r)z + r}{z^2 + z(KT(1-r) - (1+r)) + r} = \frac{(z-r)(z-1)}{(z-p_1)(z-p_2)} \quad 2.20$$

Les pôles p_1 et p_2 sont les solutions de l'équation caractéristique 2.13.

Ils sont réels positifs si

$$KT < A = \frac{1-r^{\frac{1}{2}}}{1+r^{\frac{1}{2}}} \quad 2.21$$

et réels négatifs si

$$KT > 1/A$$

Pour $A < KT < 1/A$, ils sont complexes conjugués

$$p_{1,2} = r^{\frac{1}{2}} e^{\pm j\gamma} \quad 2.22$$

$$\text{avec} \quad \gamma = \arccos \frac{(1+r) - KT(1-r)}{2r^{\frac{1}{2}}} \quad 2.23$$

$$\text{De plus} \quad p_1 p_2 = r, \quad p_1 + p_2 = (1+r) - KT(1-r) \quad 2.24$$

Le lieu des pôles pour KT croissant et $r = 0,8$ est représenté à la figure 2.4

La transformée inverse de

$$Y(z) = X(z).W(z)$$

peut être obtenue de plusieurs façons différentes [15,p.176]

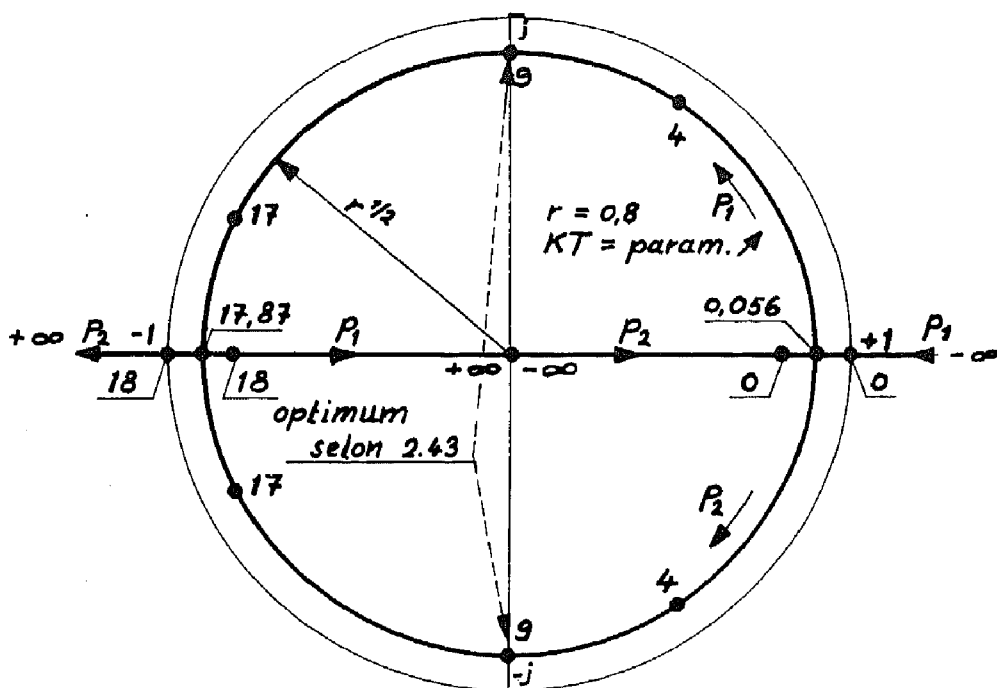


Fig.2.4 Lieu des pôles p_1 et p_2 pour $r = 0,8$

a) Par la relation

$$y_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Y(z) z^{n-1} dz \quad 2.25$$

le contour Γ entourant toutes les singularités p_i de $Y(z)z^{n-1}$. Cette intégrale peut être calculée à l'aide du théorème des résidus [16, p. 173] qui donne

$$y_n = \sum_{\text{tous les } p_i} \text{résidus de } Y(z)z^{n-1} \text{ en } p_i \quad 2.26$$

b) En décomposant $Y(z)$ en somme d'éléments plus simples dont on connaît les transformées inverses.

c) Par division du numérateur par le dénominateur. On obtient ainsi directement la série

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \quad 2.27$$

La réponse y_n à la perturbation x_n peut être déterminée sans passer par les transformées en z ; en effet, la fonction de transfert a la forme générale

$$W(z) = Y(z)/X(z) = \frac{\sum_{i=0}^k a_i z^{k-i}}{\sum_{i=0}^k b_i z^{k-i}} \quad \text{avec } b_0 \neq 0 \quad 2.28$$

En remplaçant $Y(z)$ et $X(z)$ par leurs expressions tirées de 2.27, on obtient

$$\left(\sum_{i=0}^k b_i z^{k-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} \right) = \left(\sum_{i=0}^k a_i z^{k-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j z^{-j} \right) \quad 2.29$$

d'où, en égalant les termes de degré $k-n$

$$\sum_{i=0}^k b_i y_{n-i} = \sum_{i=0}^k a_i x_{n-i} \quad 2.30$$

Cette relation appliquée à la fonction de transfert 2.20 donne

$$y_n + (KT(1-r) - (1+r))y_{n-1} + ry_{n-2} = x_n - (1+r)x_{n-1} + rx_{n-2} \quad 2.31$$

2.2.4 Réponse indicielle

La réponse indicielle est donnée par la transformée inverse de

$$H(z) = W(z) \frac{z}{z-1} = \frac{z(z-r)}{(z-p_1)(z-p_2)} \quad 2.32$$

$z/(z-1)$ étant la transformée d'un saut unité.

La relation 2.26 permet de calculer

$$h_n = \frac{1}{p_1 - p_2} ((p_1^{n+1} - p_2^{n+1}) - r(p_1^n - p_2^n)) \quad 2.33$$

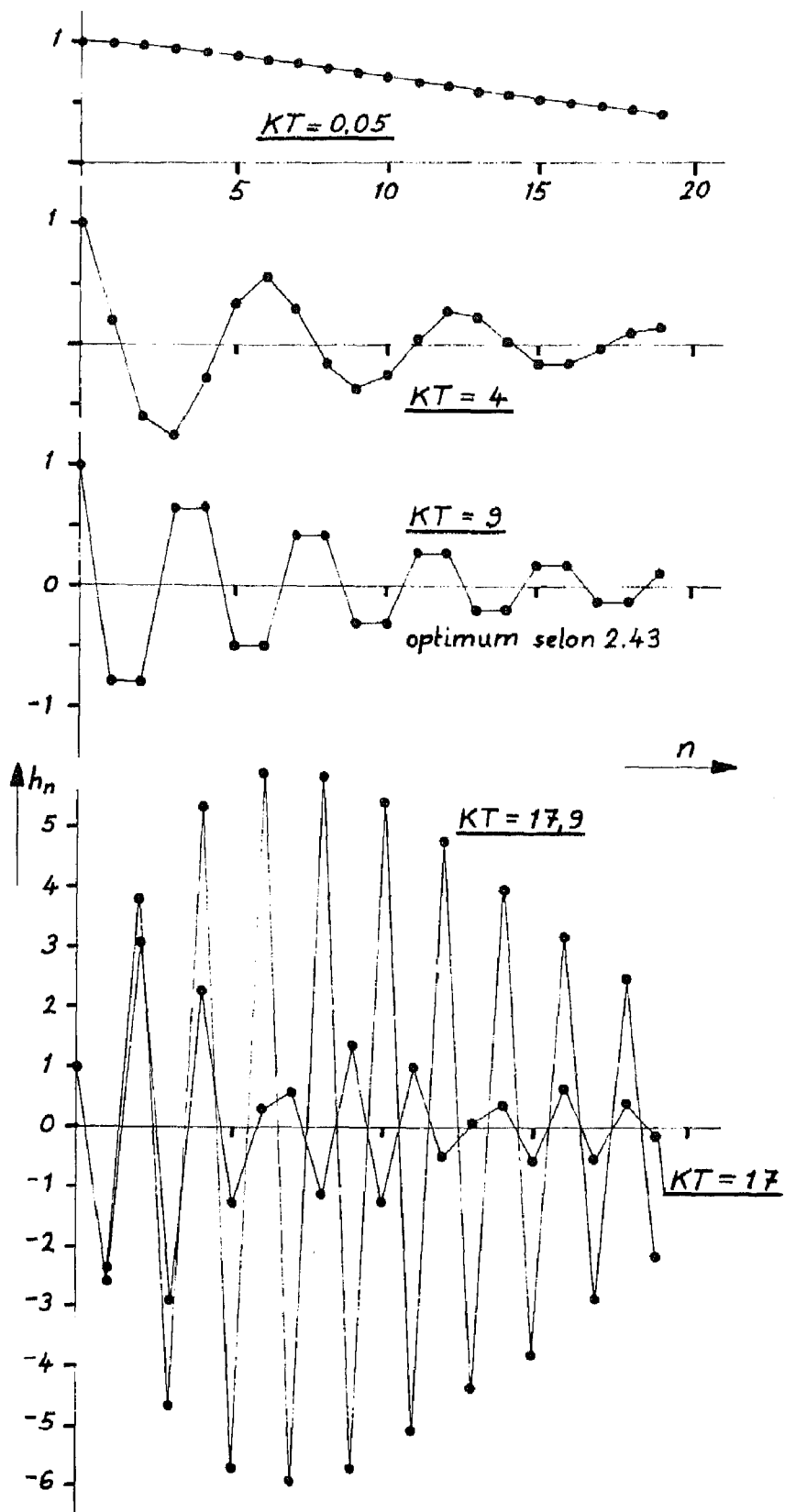


Fig.2.5 Réponse indicielle pour $r = 0,8$

Si p_1 et p_2 sont complexes conjugués, 2.22 donne

$$h_n = \frac{r^{n/2}}{\sin \gamma} (\sin(n+1)\gamma - r^{1/2} \sin n\gamma) \quad 2.34$$

où γ est la phase de p_1 donnée par 2.23.

La suite des h_n peut aussi être calculée par itération à l'aide de la relation 2.31, en posant

$$\begin{aligned} x_n &= 0 \text{ et } y_n = 0 & \text{pour } n < 0 \\ x_n &= 1 & \text{pour } n \geq 0 \end{aligned}$$

La figure 2.5 représente les 20 premiers termes calculés de cette manière avec $r = 0,8$ et plusieurs valeurs de KT comprises entre les limites de stabilité 2.17 et 2.18.

2.2.5 Bruit

Les périodes T_n de l'oscillateur local libre, et les groupes $(NT_i)_n$ de N périodes du signal d'entrée, présentent des écarts de caractère aléatoire par rapport à leurs valeurs moyennes respectives. Ces fluctuations correspondent à une perturbation de phase formée d'une suite de sauts Δx_n donnés par

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = 2\pi N \frac{(T_n - \bar{T})_{\text{boucle ouverte}} - ((NT_i)_n - \overline{NT_i})}{\bar{T}} \quad 2.35$$

L'oscillateur local, travaillant à quelques hertz, sera constitué par un circuit à relaxation pour lequel chaque écart de période est indépendant du précédent. On admettra qu'il en est de même pour les fluctuations de $(NT_i)_n$ si elles ne sont pas négligeables.

La séquence d'autocorrélation de la suite des Δx_n est alors

$$\psi_{\Delta x}(k) = \begin{cases} \sigma_{\Delta x}^2 = \left(\frac{2\pi N}{\bar{T}}\right)^2 (\sigma_T^2 + \sigma_{NT_i}^2) & \text{pour } k=0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases} \quad 2.36$$

où σ_T^2 et $\sigma_{NT_i}^2$ sont les variances respectives des écarts non corrélés $T_n - \bar{T}$ et $(NT_i)_n - \overline{NT_i}$.

La réponse du système bouclé à la suite Δx_n sera

$$y_n = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta x_{n-i} h_i + x_{-\infty} h_{\infty}$$

Le système est du type PI, sans erreur de "position", donc h_{∞} est nul. Comme $x_{-\infty}$ est fini, le second terme est nul.

La suite d'autocorrélation des y_n

$$\psi_y(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} y_n y_{n-k}$$

s'écrit alors

$$\psi_y(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Delta x_{n-i} h_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Delta x_{n-j-k} h_j \right)$$

En effectuant le passage à la limite avant les sommations, on obtient

$$\psi_y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_i h_j \psi_{\Delta x}(j-i+k) \quad 2.37$$

d'où pour Δx_n sans corrélation (relation 2.36):

$$\psi_y(k) = \sigma_{\Delta x}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n h_{n \pm k} \quad 2.38$$

(signe + pour $k \geq 0$, signe - pour $k \leq 0$).

En particulier, pour $k = 0$:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\Delta x}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n^2 \quad 2.39$$

On montre dans l'appendice 1 que

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n h_{n+k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{cercle unité}} H(z) H(z^{-1}) z^{k-1} dz \quad 2.40$$

= \sum résidus $H(z) H(z^{-1}) z^{k-1}$ en tous les pôles de module inférieur à 1.

En introduisant l'expression 2.32 de $H(z)$ on obtient pour $k = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2 = \frac{(1-r^2)+2KT_r}{KT(1-r)(2(1+r)-KT(1-r))} \quad 2.41$$

dont le minimum pour $KT > 1$ est

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2 \right)_{\min} = \frac{1}{2}(KT+1/KT) \quad 2.42$$

pour $r_{\text{opt}} = \frac{KT-1}{KT+1} \quad 2.43$

Les relations 2.22 et 2.23 montrent que cet optimum correspond à une paire de pôles conjugués imaginaires.

En combinant 2.42 et 2.39 :

$$(\sigma_y^2)_{\min} = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta x}^2(KT+1/KT) \quad 2.44$$

2.3 Approximation continue

2.3.1 Equation du système

On remplace l'ensemble échantillonneur-filtre de la figure 2.1 par un filtre continu de constante de temps

$$\tau = RCT/T_e \quad 2.45$$

représenté à la figure 2.6

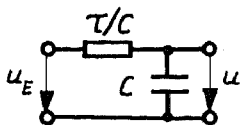


Fig.2.6 Filtre continu du premier ordre

On peut alors écrire

$$\tau \dot{u} = u_E - u \quad 2.46$$

En combinant les relations 1.2 à 1.5, 2.11 et 2.46, on obtient pour ω_i et ω_{00} constantes :

$$\tau \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + K_m (\sin \varphi - \sin \varphi_0) = 0 \quad 2.47$$

où φ_0 est l'angle d'équilibre atteint lorsque $\dot{\varphi} \equiv 0$, donné par

$$\sin \varphi_0 = \frac{\omega_i - N \omega_{00}}{K_m} = u_0 / U_i \quad 2.48$$

On peut remarquer que l'équation 2.47 est celle d'un pendule avec pertes, de moment d'inertie τ , soumis à un couple constant $K_m \sin \varphi_0$ et au couple $K_m \sin \varphi$ dû à la gravité.

En introduisant un temps normalisé

$$t' = (K_m / \tau)^{\frac{1}{2}} t \quad 2.49$$

l'équation du système 2.47 devient

$$\frac{d^2 \varphi}{dt'^2} + (K_m \tau)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{dt'} + \sin \varphi = \sin \varphi_0 \quad 2.50$$

2.3.2 Domaine d'entraînement

Il n'existe un angle d'équilibre φ_0 (relation 2.48), donc une possibilité de synchronisme entre l'oscillateur et le sous-multiple N de la fréquence d'entrée, que dans le domaine d'entraînement

$$N \omega_{00} - K_m < \omega_i < N \omega_{00} + K_m \quad 2.51$$

de largeur relative

$$D_e = \frac{2K_m}{N \omega_{00}} = \frac{2kU_i}{\omega_{00}} \quad 2.52$$

et centré sur $\omega_i = N \omega_{00}$.

Le fait que ce domaine, dans lequel la fréquence d'entrée peut entraîner la fréquence de l'oscillateur, est indépendant du rapport de division N est une propriété remarquable du système, qui le distingue des autres systèmes de division de fréquence par synchronisation d'un oscillateur.

On peut donc atteindre un rapport N bien supérieur à l'inverse de l'instabilité de fréquence à long terme de l'oscillateur. C'est dans cette optique particulière où

$$ND_e \gg 1 \quad 2.53$$

que le système sera étudié et optimisé.

Lorsque D_e ne dépasse pas quelques dizaines de pourcents, on peut admettre que

$$2\pi/T = \omega \approx \omega_0 \approx \omega_{00} \quad 2.54$$

Les relations 2.52 et 2.53 donnent alors

$$K_m T \approx \pi ND_e \gg 1 \quad 2.55$$

La condition de stabilité 2.18 ne sera réalisée pour $K = K_m$ que si

$$1-r = \epsilon \ll 1 \quad 2.56$$

donc, d'après la définition 2.3 de r

$$\epsilon \approx T_e/RC \ll 1 \quad 2.57$$

et, par la relation 2.45

$$\tau \approx T/\epsilon \gg T \quad 2.58$$

Les équations 2.54, 2.55, 2.56 et 2.58 permettent de transformer la condition 2.18 qui devient

$$K_m \tau > (\pi K_m / \omega_{00})^2 = (\pi D_e N / 2)^2 \gg 1 \quad 2.59$$

2.3.3 Domaine de capture

On appelle domaine de capture le domaine des fréquences ω_i pour lesquelles l'oscillateur se croche sur un sous-multiple N donné de ω_i à partir de conditions initiales $(\varphi, \dot{\varphi})$ quelconques.

Ce domaine a été calculé par A.Giger [17] pour un système décrit par une équation identique à 2.50. Son résultat est reporté à la figure 2.7.

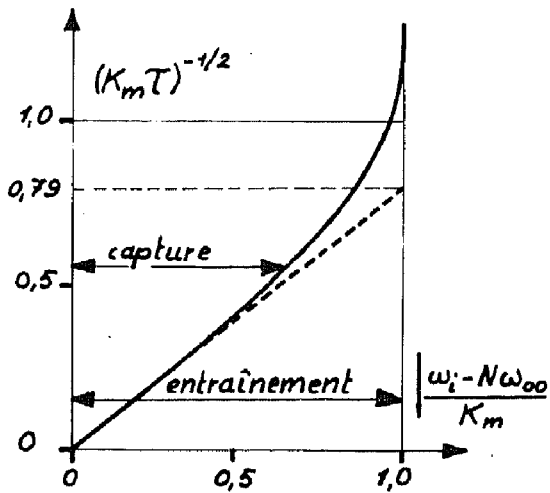


Fig.2.7 Domaine de capture

Comme d'après 2.59 $(K_m \tau)^{-1/2} < 1$, le domaine de capture est donné approximativement par

$$N\omega_{00} - 1,27(K_m/\tau)^{\frac{1}{2}} < \omega_i < N\omega_{00} + 1,27(K_m/\tau)^{\frac{1}{2}} \quad 2.60$$

Il est centré sur $\omega_i = N\omega_{00}$ et de largeur relative

$$D_c = \frac{2,54}{N\omega_{00}} (K_m/\tau)^{\frac{1}{2}} \quad 2.61$$

donc, d'après 2.59

$$D_c < \frac{2,54}{\pi N} \quad 2.62$$

résultat cohérent avec la définition du domaine de capture; en effet, les domaines de capture relatifs à des valeurs de N voisines ne doivent pas se chevaucher, donc $ND_c < 1$.

2.3.4 Trajectoires dans l'espace de phase

Les trajectoires-solutions de l'équation 2.50 sont données dans la littérature [18]. Rappelons qu'on les obtient en décomposant l'équation du 2ème ordre en 2 équations du 1er ordre

$$\frac{d\varphi}{dt'} = z \quad 2.63$$

$$\frac{dz}{dt'} = \sin\varphi_0 - \sin\varphi - (K_m \tau)^{-\frac{1}{2}} z \quad 2.64$$

On peut en tirer l'équation des isoclines

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi_0 - \sin\varphi}{z} - (K_m \tau)^{-\frac{1}{2}} \quad 2.65$$

permettant de construire graphiquement le réseau de trajectoires, qui seront représentées sur la surface d'un cylindre de rayon unité pour préserver la périodicité 2π de φ .

L'allure des trajectoires lorsque le système travaille dans son domaine d'entraînement, mais en-dehors du domaine de capture est illustrée par la figure 2.8 (tirée de la référence [18]) pour φ_0 positif.

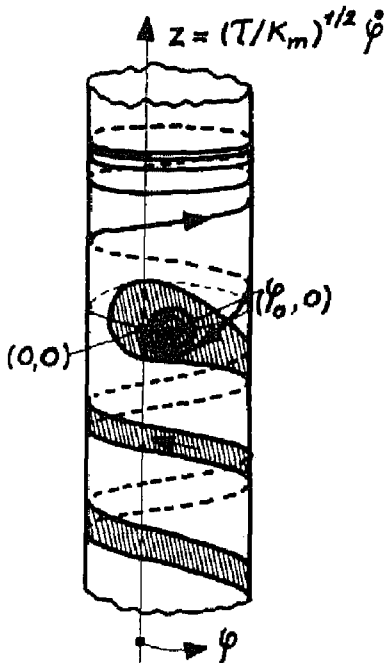


Fig.2.8 Trajectoires-solutions pour $0 < \varphi_0 < \pi/2$

On remarque une solution périodique de 2ème ordre (entourant le cylindre) ainsi qu'un "corridor" de capture (hachuré).

On a vu que si $ND_e \gg 1$, le coefficient $(K_m \tau)^{-\frac{1}{2}}$ du terme d'amortissement est nécessairement très petit. Si ce terme est nul, 2.50 devient

$$\frac{d^2\varphi}{dt'^2} + (\sin\varphi - \sin\varphi_0) = 0 \quad 2.66$$

équation d'un système conservatif, qui ne correspond pas qualitativement au système physique étudié, toujours amorti. On peut le considérer comme un cas limite ayant l'intérêt de posséder une solution analytique. En effet, 2.65 peut alors être intégré et donne

$$z = \pm (2(\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi) + \text{constante})^{\frac{1}{2}} \quad 2.67$$

La figure 2.9 représente, dans le plan de phase obtenu en déroulant le cylindre, quelques trajectoires calculées à l'aide de cette relation pour $\varphi_0 = \pi/6$

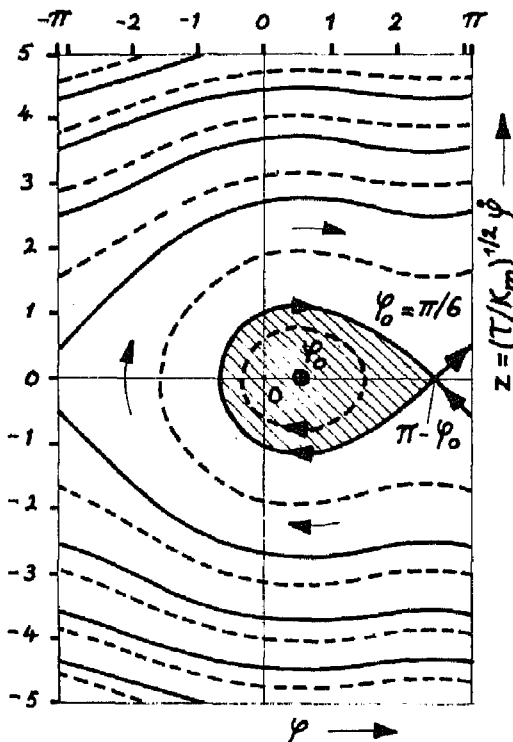


Fig.2.9 Plan de phase du système conservatif pour $\varphi_0 = \pi/6$

Le centre $(\varphi_0, 0)$ est entouré de trajectoires fermées du 1er ordre jusqu'à la séparatrice passant par le col $(\pi - \varphi_0, 0)$

Les autres trajectoires montent indéfiniment en s'enroulant autour du cylindre. Il n'existe ni corridor de capture, ni trajectoire fermée de 2ème ordre.

La région hachurée correspond au système croché. En réalité, dans le cas du système réel légèrement amorti, les trajectoires fermées se transforment en spirales tendant lentement vers le point d'équilibre $(\varphi_0, 0)$ transformé en foyer.

2.3.5 Mise en synchronisme (crochage)

Si l'instabilité relative à long terme de l'oscillateur est bien supérieure à D_c , lui-même inférieur à $1/N$, le système ne se trouve pratiquement jamais dans le domaine de capture relatif au rapport N désiré. Il faut donc le crocher sur ce rapport en imposant des conditions initiales convenables.

Le terme d'amortissement étant très faible, on peut admettre que le domaine des conditions initiales conduisant au synchronisme correspond à la région hachurée de la figure 2.9. Cette région est limitée par une partie de la séparatrice d'équation

$$z^2/2 = (\varphi + \varphi_0 \mp \pi) \sin \varphi_0 + \cos \varphi + \cos \varphi_0 \quad 2.68$$

le signe négatif correspondant à φ_0 positif. Elle est représentée à la figure 2.10 pour quelques valeurs positives de φ_0 (symétrie par rapport à $\varphi = 0$ pour φ_0 négatif)

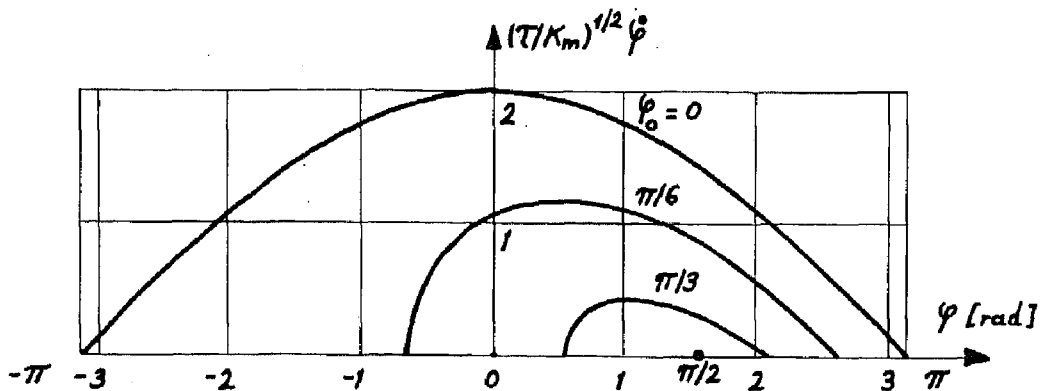


Fig.2.10 Domaine de mise en phase

La grandeur $(\frac{\tau}{K_m})^{\frac{1}{2}} \dot{\varphi}$ correspond à la fréquence de battement entre f_i et Nf normalisée à la fréquence de coupure de la boucle lorsque $\varphi_0 = 0$ (voir la relation 2.72).

Pour synchroniser le diviseur, on impose une tension u par une source extérieure de façon à obtenir $\dot{\varphi}$ aussi faible que possible. On déconnecte cette source à un instant où φ est comprise entre les limites données par la figure 2.10. Ces limites sont d'autant plus rapprochées que la fréquence de battement et la phase d'équilibre sont grandes.

2.3.6 Saut de phase maximum

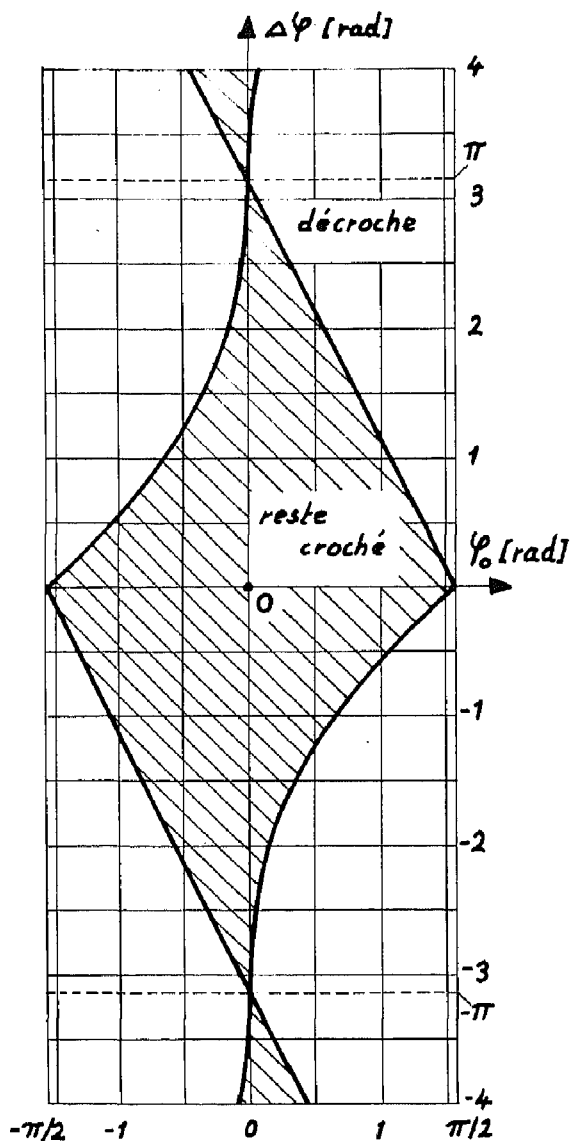


Fig.2.11 Saut de phase maximum

Si le système est initialement à son point d'équilibre $(\varphi_0, 0)$, un saut de phase $\Delta\varphi$ l'amènera au point $(\varphi_0 + \Delta\varphi, 0)$. Le caractère passe-bas du filtre empêche en effet tout saut de u , donc de $\dot{\varphi}$ (par 1.2 et 1.3).

Si le système est peu amorti, on peut admettre que les valeurs extrêmes de $\varphi_0 + \Delta\varphi$ pour lesquelles le diviseur ne décrochera pas sont données par les deux intersections de la séparatrice de la figure 2.9 avec l'axe des φ . En résolvant graphiquement l'équation 2.68 pour $z = 0$, on obtient le domaine de stabilité représenté à la figure 2.11.

2.3.7 Approximation linéaire

A l'équation 2.46 correspond la fonction de transfert du filtre

$$G_f = \frac{1}{1+s\tau} \quad 2.69$$

La fonction de transfert de la boucle continue et linéaire ouverte peut alors être calculée en utilisant les relations 2.6 et 2.8:

$$G(s) = -G_f G_o G_d = \frac{K}{s(1+s\tau)} \quad 2.70$$

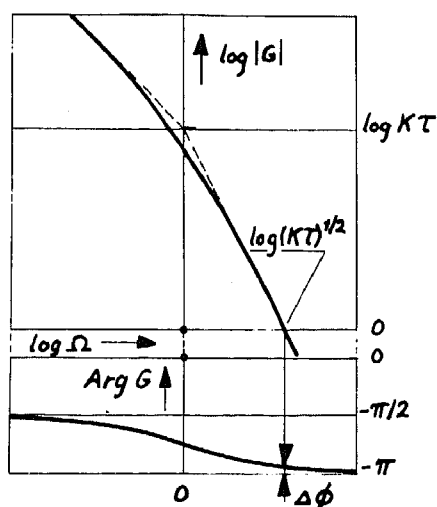


Fig. 2.12 Transmittance harmonique (approximation linéaire et continue)

En remplaçant $s\tau$ par $j\Omega$, on en tire la transmittance harmonique (Ω est une pulsation normée à $1/\tau$)

$$G(\Omega) = \frac{K\tau}{j\Omega(1+j\Omega\tau)} \quad 2.71$$

représentée à la figure 2.12.

La fréquence de coupure (correspondant à $|G| = 1$) est

$$\omega_c = (K\tau)^{\frac{1}{2}}/\tau = (K/\tau)^{\frac{1}{2}} \quad 2.72$$

et sa marge de phase

$$\Delta\phi = \text{Arctg}(K\tau)^{-\frac{1}{2}} \quad 2.73$$

Pour $\varphi_0 = 0$, la relation 2.59 montre que

$$\Delta\phi < \frac{2}{\pi D_e N} \quad 2.74$$

3. BOUCLE D'ASSERVISSEMENT DU TROISIEME ORDRE

3.1 Introduction

La relation 2.74 montre que la marge de phase, dans l'approximation linéaire continue du système avec filtre du premier ordre, devient très faible lorsque ND_e augmente. Le système est alors peu amorti et sa stabilité n'est pas suffisamment assurée.

En introduisant l'équation 2.55 dans la relation 2.44, on obtient pour φ_0 nul

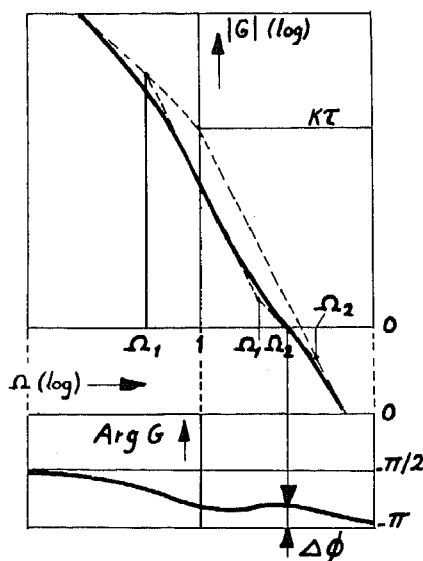
$$(\sigma_y^2)_{\min} / \sigma_{\Delta x}^2 \approx \pi ND_e / 2 \gg 1 \quad 3.1$$

Le bruit du système bouclé est très grand et la probabilité de décrochage élevée.

Pour ces raisons on va introduire une correction du filtre qui deviendra un filtre du deuxième ordre. La boucle complète sera alors du troisième ordre.

3.2 Approximation continue

3.2.1 Approximation continue linéaire



La méthode classique de correction d'un système asservi consiste à modifier sa transmittance harmonique en boucle ouverte de façon à ce que le gain passe par la valeur unité avec une pente aussi faible que possible.

Cette correction effectuée sur la transmittance de la figure 2.12 est représentée à la figure 3.1

Fig.3.1
Transmittance harmonique corrigée (approximation linéaire et continue)

Elle correspond à une transmittance de la boucle ouverte

$$G = \frac{j\Omega + \Omega_1 \Omega_2}{j\Omega (j\Omega + \Omega_1)(j\Omega + \Omega_2)} K\tau \quad 3.2$$

qu'on obtient en remplaçant le filtre du premier ordre par le filtre du deuxième ordre représenté à la figure 3.2

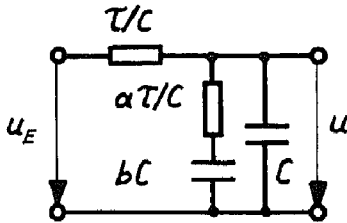


Fig.3.2
Filtre continu du 2^{ème} ordre

avec $ab \ll 1$ 3.3

$$\Omega_1 = 1/(1+b) \quad 3.4$$

$$\Omega_2 = (1+b)/ab \quad 3.5$$

$$\Omega_1 \Omega_2 = 1/ab \gg 1 \quad 3.6$$

3.2.2 Equation du système non-linéaire

Si $ab \ll 1$, le filtre de la figure 3.2 répond à l'équation

$$\tau^2 ab \ddot{u} + \tau(1+b) \dot{u} + u = u_e + ab\tau \dot{u}_e \quad 3.7$$

En éliminant u , ω , u_e et $U_1^!$ entre les relations 1.2, 1.3, 1.5, 2.11 et 3.7, on obtient l'équation différentielle de la phase

$$\tau^2 ab \ddot{\varphi} + \tau(1+b) \dot{\varphi} + (1 + K_m ab \tau \cos \varphi) \varphi + K_m \sin \varphi =$$

$$\tau^2 ab (\ddot{\omega}_1 - N \ddot{\omega}_{00}) + \tau(1+b) (\dot{\omega}_1 - N \dot{\omega}_{00}) + (\omega_1 - N \omega_{00}) \quad 3.8$$

Si ω_i et ω_{00} sont constantes, cette équation devient

$$\tau^2 ab \ddot{\varphi} + \tau(1+b) \ddot{\varphi} + (1 + K_m ab \tau \cos \varphi) \dot{\varphi} + K_m \sin \varphi = K_m \sin \varphi_0 \quad 3.9$$

φ_0 est la phase d'équilibre atteinte pour $\dot{\varphi} \equiv 0$ lorsque ω_i et ω_{00} sont constantes. Elle est évidemment identique à celle du système du deuxième ordre donnée par 2.48.

3.2.3 Réponse à une rampe de fréquence

Pour $\ddot{\omega}_i \equiv \ddot{\omega}_{00} \equiv 0$, l'équation 3.8 correspond à 3.9 avec un nouvel angle d'équilibre φ'_0 donné par

$$\sin \varphi'_0 = \sin \varphi_0 + \frac{\tau(1+b)}{K_m} (\dot{\omega}_i - N \dot{\omega}_{00})$$

qu'on peut écrire

$$\sin \varphi'_0 = \sin \varphi_0 + \tau_r \left(\frac{\dot{\omega}_i}{N \omega_{00}} - \frac{\dot{\omega}_{00}}{\omega_{00}} \right) \quad 3.10$$

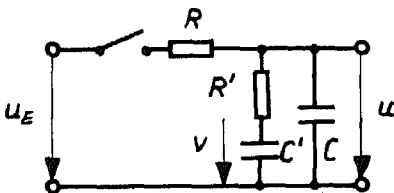
où la constante de temps de réaction

$$\tau_r = \frac{\tau(1+b)N\omega_{00}}{K_m} \approx \frac{2\pi N\tau(1+b)}{K_m T} \quad 3.11$$

caractérise la réponse du système à une rampe de fréquence. Puisque le diviseur décroche dès que $\sin \varphi'_0$ dépasse 1 en valeur absolue, cette constante de temps limite la vitesse admissible de variation de ω_i et ω_{00} .

3.3 Approximation linéaire

3.3.1 Fonction de transfert de la boucle ouverte



L'échantillonneur-filtre du deuxième ordre correspondant au filtre continu de la figure 3.2 est représenté à la figure 3.3

Fig.3.3 Echantillonneur-filtre du deuxième ordre

La résistance du réseau de correction est la même que dans l'approximation continue (Fig.3.2), donc

$$R' = a\tau/C \quad 3.12$$

Définitions :

$$C' = bC \quad 3.13$$

$$\tau_d = R'Cb/(1+b) \gg T_e \text{ (hypothèse)} \quad 3.14$$

$$d = e^{-T/\tau_d} \quad 3.15$$

n = ordre de la période d'échantillonnage

$0 < m < 1$ = fraction de la période

$$t = (n+m)T = \text{temps quelconque} \quad 3.16$$

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= u(t) \\ v_{n+m} &= v(t) \end{aligned} \quad \left| \quad nT < t < (n+1)T \right.$$

$$\begin{aligned} u_n &= u(nT) \\ v_n &= v(nT) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{à la fin du temps} \\ \text{d'échantillonnage} \end{array} \right.$$

L'évolution de u et v entre la fin du $n^{\text{ième}}$ échantillonnage et le début du $(n+1)^{\text{ième}}$ est décrite par les équations

$$(1+b)u_{n+m} = (1+bd^m)u_n + b(1-d^m)v_n \quad 3.17$$

$$(1+b)v_{n+m} = (1-d^m)u_n + (b+d^m)v_n \quad 3.18$$

Calculons la transformée en s $U(s)$ de la réponse $u(t)$ de l'échantillonneur-filtre à un échantillon unité unique en $t=0$.

Cet échantillon fournit une charge initiale à C , qui est ensuite répartie entre C et C' , puis retirée progressivement à chaque fermeture de l'interrupteur.

Pour $n > 0$, le passage d'une période à la suivante se fait donc par les équations

$$u_{n+1} = ru_{n+m} \Big|_{m=1} = \frac{r}{1+b} ((1+bd)u_n + b(1-d)v_n) \quad 3.19$$

$$v_{n+1} = v_{n+m} \Big|_{m=1} = \frac{1}{1+b} ((1-d)u_n + (b+d)v_n) \quad 3.20$$

le facteur de rétention r étant donné par la relation 2.3

Après élimination de v entre ces deux équations, on obtient

$$u_{n+2} - \frac{b+d+rbd+r}{1+b} u_{n+1} - rdu_n = 0 \quad 3.21$$

dont la solution est [19, p.210]

$$u_n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n \quad 3.22$$

où z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation caractéristique

$$z^2 - \frac{b+d+r+rbd}{1+b} z - rd = 0$$

donc du système

$$\left. \begin{aligned} z_1 + z_2 &= \frac{b+d+r+rbd}{1+b} \\ z_1 z_2 &= rd \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{toujours positif} \\ \text{compris entre 0 et 1} \end{array} \quad 3.23$$

C_1 et C_2 sont des constantes données par les conditions initiales:

$$\left. \begin{aligned} 1-r &= C_1 + C_2 \\ (1-r)r \frac{1+bd}{1+b} &= C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \text{(pour } n=0) \\ \text{(pour } n=1) \end{array} \quad 3.24$$

D'autre part, en éliminant v_n entre 3.17 et 3.19 on obtient

$$u_{n+m} = \frac{1}{1-d} ((u_{n+1}/r - du_n) + d^m (u_n - u_{n+1}/r)) \quad 3.25$$

donc

$$u(t) = \frac{1}{1-d} \sum_{n=0}^{\infty} ((u_{n+1}/r - du_n)(l(t-nT) - l(t-(n+1)T) + e^{-(t-nT)/\tau_d} (u_n - u_{n+1}/r)(l(t-nT) - d.l(t-(n+1)T))) \quad 3.26$$

où $l(t)$ est la fonction "saut unité".

A l'aide de 3.22, 3.23 et 3.24, la transformée de Laplace de 3.26 s'écrit

$$U(s) = \frac{(1-r)(e^{sT}-1)(e^{sT}-d)}{(1+b)(e^{sT}-z_1)(e^{sT}-z_2)} (1/s+b/(s+1/\tau_d)) \quad 3.27$$

En combinant 3.27 avec 2.6, 2.7 et 2.10 on obtient la transformée en s de la réponse de la boucle ouverte avant échantillonnage

$$- G_d G_o U(s) = \frac{K(1-r)}{1+b} \cdot \frac{(e^{sT}-1)(e^{sT}-d)}{(e^{sT}-z_1)(e^{sT}-z_2)} \cdot \left(\frac{1}{s^2} + \frac{b\tau_d}{s} + \frac{b\tau_d}{s+1/\tau_d} \right) \quad 3.28$$

La fonction de transfert échantillonnée correspondante s'obtient comme pour le système du 2ème ordre en remplaçant les fonctions de s par les fonctions de z correspondantes, ce qui donne comme résultat

$$G(z) = Pz \frac{(z-d)+Q(z-1)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-1)} \quad 3.29$$

avec

$$P = \frac{KT(1-r)}{1+b} \quad 3.30$$

$$Q = (1-d)b\tau_d/T \quad 3.31$$

3.3.2 Stabilité

Avec la fonction de transfert de la boucle ouverte $G(z)$ donnée par la relation 3.29, l'équation caractéristique

$$1+G(z) = 0 \quad 2.13$$

devient

$$z^3 + z^2(P(1+Q) - (z_1+z_2) - 1) + z(z_1z_2 + (z_1+z_2) - P(d+Q)) - z_1z_2 = 0 \quad 3.32$$

de la forme

$$A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0$$

à laquelle correspond, en passant à la variable w (définie par 2.14)

$$B_0 w^3 + B_1 w^2 + B_2 w + B_3 = 0$$

avec

$$B_0 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

$$B_1 = 3(A_0 - A_3) + A_1 - A_2$$

$$B_2 = 3(A_0 + A_3) - A_1 - A_2$$

$$B_3 = A_0 - A_1 + A_2 - A_3$$

Pour un système du troisième ordre, le critère de Routh-Hurwitz se ramène à la condition:

$$B_0, B_1, B_2, B_3 \text{ et } B_1 B_2 - B_0 B_3 \text{ de même signe.}$$

En tirant les valeurs de A_i de l'équation 3.32, on obtient les deux conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la stabilité du système (en éliminant z_1 et z_2 à l'aide du système 3.23)

$$K > 0 \quad 2.17$$

$$KT < \frac{2}{1-r} \cdot \frac{1+2b+d+r+2rbd+rd}{(1+d)+(1-d)2b\tau_d/T} \quad 3.33$$

Comme pour le système du deuxième ordre, on a une condition évidente sur le signe de K et la seconde condition 3.33 ne sera respectée pour φ_0 nul et $ND_e \gg 1$ que si

$$1-r = \varepsilon \ll 1 \quad 2.56$$

Cette condition devient alors

$$KT\varepsilon < \frac{4(1+b)}{1+2b\frac{1-d}{1+d}\tau_d/T} \quad 3.34$$

Elle est représentée à la figure 3.4 pour plusieurs valeurs de b

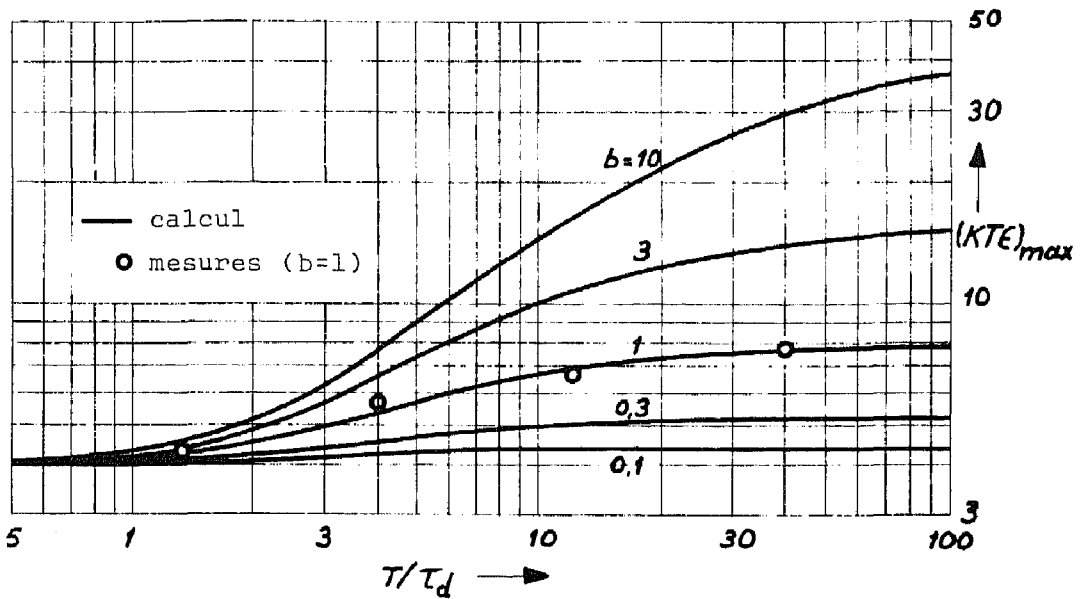


Fig.3.4 Limite de stabilité

3.3.3 Fonction de transfert du système bouclé

Rappelons que la fonction de transfert du système bouclé $W(z)$ (figure 2.3) est donnée par la relation

$$W(z) = 1/(1+G(z)) \quad 2.19$$

En introduisant l'expression 3.29 de $G(z)$:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{z^3 - (1+z_1+z_2)z^2 + (z_1z_2+z_1+z_2)z - z_1z_2}{z^3 + (P(1+Q) - (z_1+z_2) - 1)z^2 + (z_1z_2 + z_1 + z_2 - P(d+Q))z - z_1z_2} \\ &= \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-1)}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)} \end{aligned} \quad 3.35$$

Les 3 pôles p_i sont les solutions de l'équation caractéristique 3.32.

En appliquant les relations 2.28 et 2.30 à cette fonction de transfert, on obtient

$$\begin{aligned} y_n + (P(1+Q) - (z_1+z_2) - 1)y_{n-1} + (z_1z_2 + z_1 + z_2 - P(d+Q))y_{n-2} - z_1z_2y_{n-3} \\ = x_n - (1+z_1+z_2)x_{n-1} + (z_1z_2 + z_1 + z_2)x_{n-2} - z_1z_2x_{n-3} \end{aligned} \quad 3.36$$

Les relations 3.15, 3.31, 3.23 et 3.35 montrent que le système linéaire est entièrement défini par les 4 paramètres sans dimensions

$$P, r, b \text{ et } T/\tau_d$$

auxquels s'ajoute la période T fixant l'échelle du temps.

Si $ND_e \gg 1$, donc $\epsilon = 1-r \ll 1$, le système 3.23 devient

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1+d \\ z_1 z_2 = d \end{cases} \quad 3.37$$

Ces expressions peuvent être introduites dans 3.35 ou 3.36. On peut voir alors que les 4 paramètres sans dimensions se réduisent à 3 :

$$P, b \text{ et } T/\tau_d$$

3.3.4 Correspondance entre paramètres

Le système a été défini dans l'approximation continue par les 4 paramètres

$$K_m, b, a \text{ et } \tau$$

Il est utile de connaître les relations liant ces paramètres à ceux du système échantillonné. K_m et b restent inchangés et on sait que

$$\tau = T/\ln(r^{-1}) \approx T/\epsilon \quad 2.58$$

Les relations 3.12 et 3.14 permettent de calculer

$$a = \ln(r^{-1}) \frac{1+b}{b} \cdot \tau_d / T = \epsilon \frac{1+b}{b} \cdot \tau_d / T \quad 3.38$$

Pour $\epsilon \ll 1$, la constante de temps de réaction donnée par 3.11 s'exprime alors sous la forme

$$\tau_r / T = \frac{\omega_{00}^{NT}}{P_m} \approx \frac{2\pi N}{P_m} \quad 3.39$$

$$\text{où} \quad P_m = K_m T \epsilon / (1+b) = P / \cos \varphi_0 \quad 3.40$$

est la valeur maximum atteinte par le paramètre P (relation 3.30) lorsque φ_0 est nul ($K = K_m$). Pour un rapport de division N et un angle d'équilibre φ_0 donnés, la constante de temps de réaction normalisée τ_r/T varie donc à peu près comme l'inverse de P .

3.3.5 Optimisation des paramètres

On optimisera les paramètres P , b et T/τ_d de façon à rendre minimum le bruit donné par la relation 2.39, tout en maintenant à une valeur suffisamment basse la constante de temps τ_r qui caractérise la réponse du système à une rampe de fréquence.

La transformée en z de la réponse indicielle h_n est obtenue en multipliant $W(z)$ donné par 3.35 par la transformée du saut unité, donc

$$H(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)z}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)} \quad 3.41$$

Pour $\epsilon \ll 1$, z_1 et z_2 sont donnés par le système 3.37 et p_1, p_2, p_3 par le système

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 2+d-P(1+Q) \\ p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_3 p_1 &= 1+2d-P(d+Q) \\ p_1 p_2 p_3 &= d \end{aligned} \right\} \quad 3.42$$

On obtient alors à l'aide de la relation 2.40

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^2 = 2 \frac{1+d((1+d)(P-1)+2PQ+d^2)}{PQ(1-d)(4(1+d)-P(1+d+2Q))} \quad 3.43$$

En égalant à zéro la dérivée par rapport à T/τ_d du second membre de cette relation, on obtient une équation irrationnelle en T/τ_d mais du deuxième degré en P .

L'une des solutions de cette équation en P ne satisfait pas la condition de stabilité 3.34.

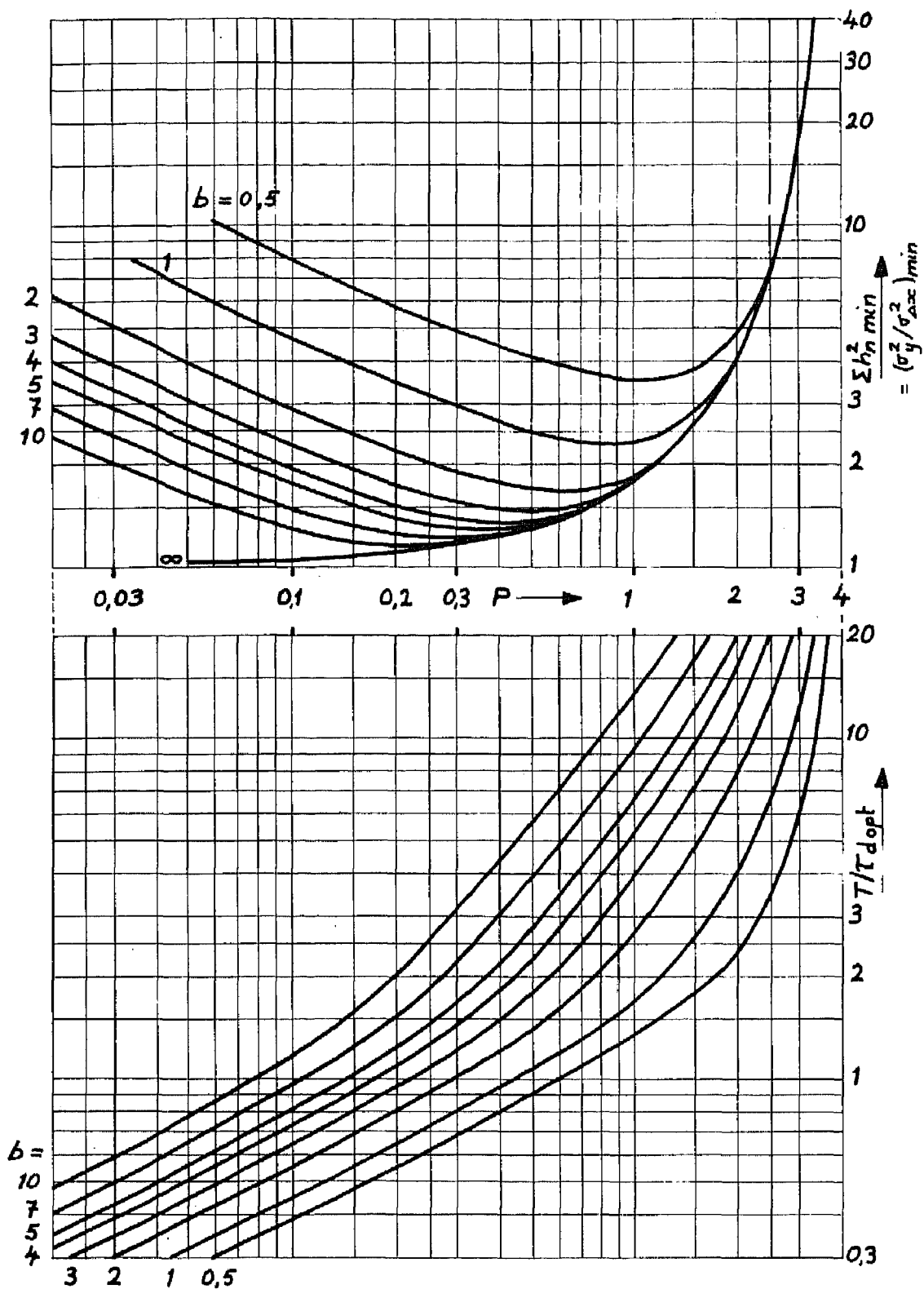


Fig.3.5 Optimisation des paramètres

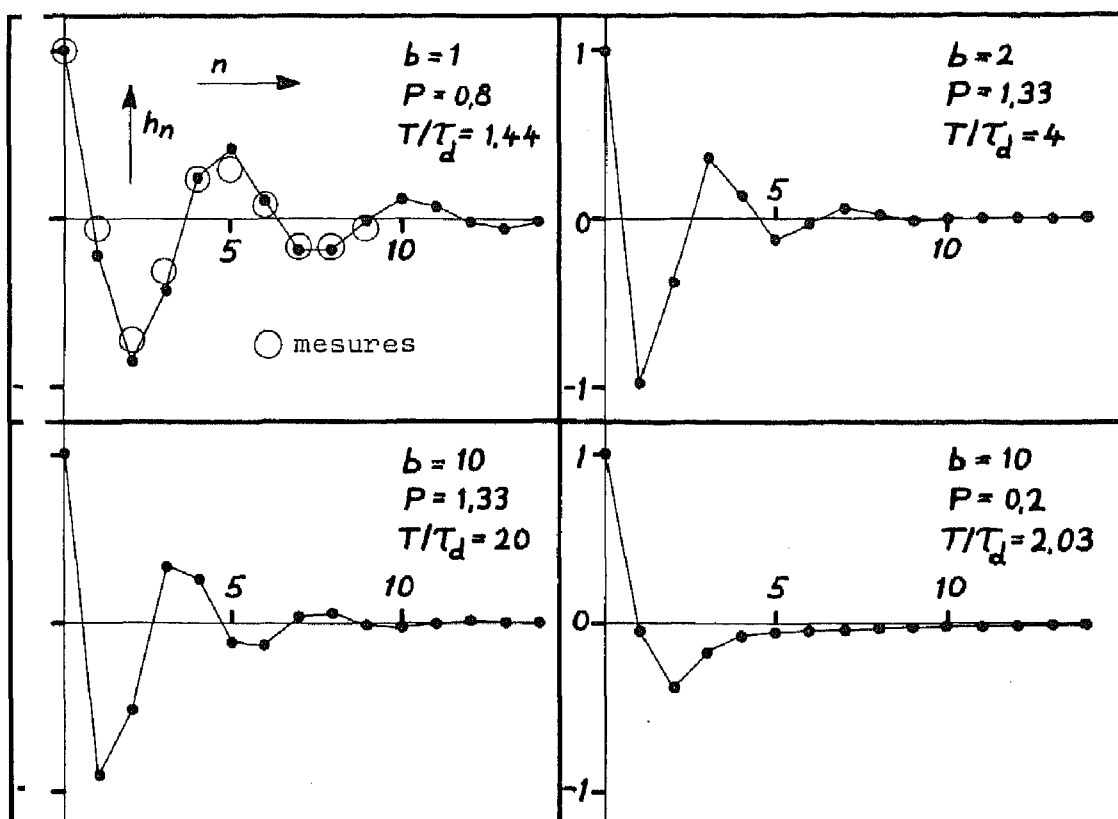


Fig.3.6 Réponses indicielles

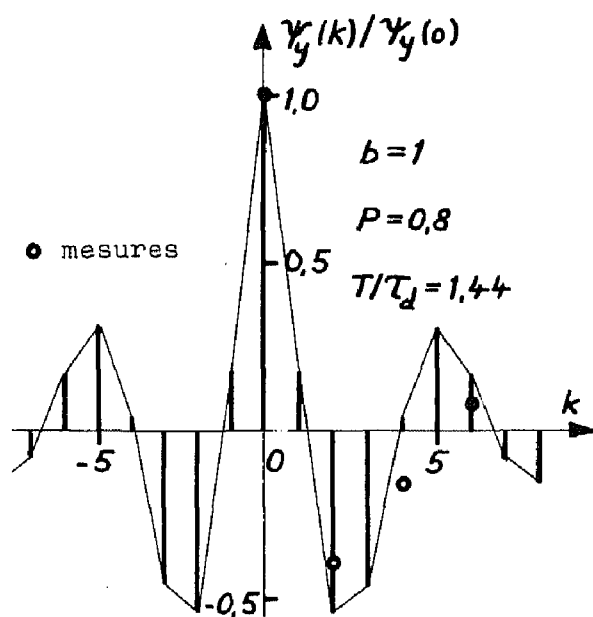


Fig.3.7 Suite d'auto-corrélation

L'autre solution représente la valeur de P pour laquelle la valeur de T/τ_d choisie correspond à un minimum de $\sum h_n^2$, donc du bruit; ce minimum peut être calculé à l'aide de 3.43.

On obtient ainsi les deux familles de courbes représentées à la figure 3.5.

On peut constater qu'à chaque valeur de P correspond une limite inférieure du bruit qu'on peut atteindre en choisissant b suffisamment grand; pour abaisser cette limite, il faut diminuer P , donc augmenter τ_r/T pour N et φ_0 donnés (relations 3.39 et 3.40).

D'autre part, à chaque valeur de b correspond une valeur de P pour laquelle le bruit passe par un minimum.

La réponse indicielle du système ainsi optimisé est représentée à la figure 3.6 pour 4 couples (b, P) , alors que la figure 3.7 représente le début de la suite d'autocorrélation normalisée du bruit en boucle fermée $\psi_y(k)/\psi_y(0)$, calculée à l'aide de la relation 2.38 pour l'un de ces couples.

3.4 Equation du système échantillonné non-linéaire

La variation de phase du $n^{\text{ième}}$ au $(n+1)^{\text{ième}}$ échantillonnage est donnée par la relation

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = N(2\pi - \int_{nT}^{(n+1)T} \omega dt) \quad 3.44$$

A l'aide des équations 1.2 et 1.4, on peut exprimer la pulsation instantanée ω de l'oscillateur sous la forme

$$\omega = \omega_0 + k(u - u_0) \quad 3.45$$

Comme $N \gg 1$, on peut admettre que la période d'intégration T est constante et égale à $2\pi/\omega_0$. A l'aide de la relation 3.17, décrivant l'évolution de u entre les échantillonnages n et $n+1$, on obtient alors

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + kNT(u_0 - \frac{1+Q}{1+B}u_n - \frac{b-Q}{1+B}v_n) \quad 3.46$$

En introduisant des tensions normalisées U_n et V_n telles que

$$v_n/V_n = u_n/U_n = U_i' \quad 3.47$$

et en utilisant la seconde expression 2.48 de $\sin \varphi_0$, la relation 3.46 prend la forme

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + K_m T \left(\sin \varphi_0 - \frac{1+Q}{1+B} U_n - \frac{b-Q}{1+B} V_n \right) \quad 3.48$$

K_m étant défini par 2.11.

D'autre part, l'équation 3.20 reste valable et s'écrit sous forme normalisée:

$$V_{n+1} = \frac{1-d}{1+B} U_n + \frac{b+d}{1+B} V_n \quad 3.49$$

Au début de l'impulsion d'échantillonnage $n+1$, la tension normalisée U vaut $U_{n+m}|_{m=1}$. Elle tend ensuite vers $\sin \varphi_{n+1}$ avec la constante de temps RC et pendant un temps T_e pour atteindre finalement la valeur U_{n+1} . Donc, d'après la définition 2.3 de r

$$U_{n+1} = U_{n+m}|_{m=1} + (1-r)(\sin \varphi_{n+1} - U_{n+m}|_{m=1})$$

ou, à l'aide de 3.17

$$U_{n+1} = (1-r)\sin \varphi_{n+1} + r\left(\frac{1+bd}{1+B} U_n + \frac{b(1-d)}{1+B} V_n\right) \quad 3.50$$

Le comportement du système non-linéaire échantillonné laissé à lui-même est décrit par le système d'équations 3.48, 3.49 et 3.50, avec l'hypothèse que la période d'échantillonnage T varie très peu en valeur relative.

L'élimination des inconnues U et V entre ces 3 équations donne finalement

$$\begin{aligned} \varphi_n = & (1+z_1+z_2)\varphi_{n-1} - (z_1+z_2+z_1z_2)\varphi_{n-2} + z_1z_2\varphi_{n-3} \\ & - P_m((1+Q)\sin \varphi_{n-1} - (d+Q)\sin \varphi_{n-2} - (1-d)\sin \varphi_0) \end{aligned} \quad 3.51$$

où P_m est la valeur de P donnée par 3.30 pour $K = K_m$, alors que $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$ sont donnés par le système 3.23.

En remplaçant φ_n par $\varphi_0 + y_n$ ($y_n \ll 1$), on retrouve l'équation 3.36 sans second membre (comportement du système laissé à lui-même pour de petits écarts de phase y_n autour de la phase d'équilibre φ_0).

Si $\epsilon = 1 - r \ll 1$, $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$ sont donnés par le système 3.37, et l'équation 3.51 peut s'écrire

$$\begin{aligned} \varphi_n = & (2+d)\varphi_{n-1} - (1+2d)\varphi_{n-2} + d\varphi_{n-3} \\ & - P_m((1+Q)\sin\varphi_{n-1} - (d+Q)\sin\varphi_{n-2} - (1-d)\sin\varphi_0) \end{aligned} \quad 3.52$$

Le système est complètement défini par les 3 paramètres sans dimensions

$$P_m, b \text{ et } T/\tau_d$$

dont dépendent Q et d .

4. LIMITES DES PERTURBATIONS ADMISSIBLES

4.1 Introduction

Pour que le diviseur reste croché sur le rapport de division imposé initialement, il est évidemment nécessaire qu'il travaille constamment à l'intérieur de son domaine d'entraînement. Cette condition statique limite l'écart maximum de la fréquence de l'oscillateur asservi par rapport à sa valeur libre.

Dans son domaine d'entraînement, le diviseur peut cependant décrocher sous l'influence de certaines perturbations (effets dynamiques). Dans l'optique d'une application dans un garde-temps, on étudiera l'effet sur le système du 3ème ordre des perturbations suivantes:

- saut de phase isolé
- saut d'amplitude du signal d'entrée
(Ces deux perturbations peuvent être la conséquence d'un choc sur le quartz de la base de temps)
- variation de la température
- bruit

On laissera de côté l'effet dynamique des variations de tension d'alimentation, forcément très lentes pour un garde-temps autonome alimenté par une pile. On s'attachera à déterminer la valeur maximum admissible pour chaque type de perturbation agissant isolément. Ces limites devront être réduites si plusieurs types de perturbations agissent simultanément.

4.2 Saut de phase isolé

On part de l'état d'équilibre

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \\ U &= U_0 = \sin \varphi_0 \\ V &= V_0 = \sin \varphi_0 \end{aligned} \right| \quad 4.1$$

La phase du premier échantillonnage suivant un saut sera

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi \quad 4.2$$

Les relations 3.49 et 3.50 donnent les états de tension à la fin de cet échantillonnage:

$$V_1 = \sin\varphi_0 \quad 4.3$$

$$U_1 = (1-r)\sin\varphi_1 + r\sin\varphi_0 \quad 4.4$$

Ces conditions initiales (φ_1, V_1, U_1) peuvent être remplacées par la suite des 3 premiers états de la phase ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) calculés à l'aide de 3.48, 3.49 et 3.50. Pour $\epsilon = 1-r \ll 1$, on obtient

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi \quad 4.2$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - P_m(1+Q)(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0) \quad 4.6$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - P_m((1+Q)\sin\varphi_2 + (1+Qd)\sin\varphi_1 - (2+Q+Qd)\sin\varphi_0) \quad 4.7$$

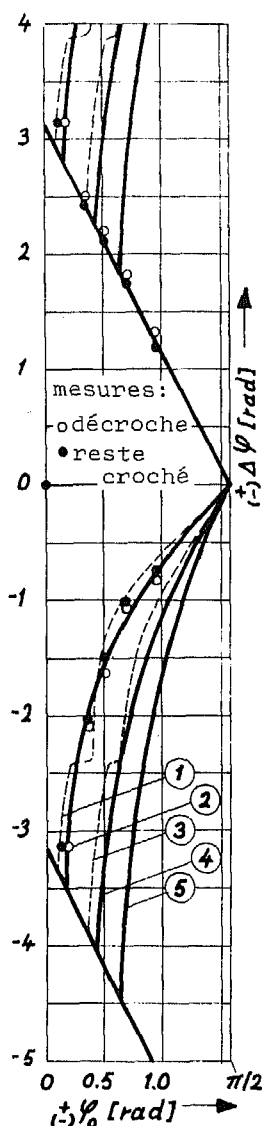
Les états de la phase suivants sont ensuite calculés à l'aide de la relation 3.52.

Les valeurs limites de $\Delta\varphi$ pour lesquelles le système revient à l'état d'équilibre initial ont été déterminées à l'aide d'une calculatrice en utilisant les critères suivants:

Critère de convergence: convergence assurée (la phase revient à sa valeur d'équilibre φ_0) dès qu'on a observé 3 valeurs de φ telles que $|\varphi - \varphi_0| < |\Delta\varphi|/10$.

Critère de divergence: divergence assurée dès que $|\varphi|$ atteint 5 radians.

Les résultats, obtenus pour plusieurs couples (p_m, b) et avec T/τ_d optimisé pour $P = P_m$, sont représentés à la figure 4.1. Les courbes en trait plein 2, 4 et 5 correspondent à des valeurs de P_m donnant un bruit minimum pour b constant (figure 3.5). Les courbes en trait interrompu 1 et 3 correspondent à une optimisation pour le bruit minimum possible avec les valeurs de P_m utilisées (courbe asymptotique de la figure 3.5); elles présentent des discontinuités



dont la nature n'a pas été approfondie.

On constate que si $|\varphi_0|$ est assez petit, un saut de phase isolé est incapable de faire décrocher le système initialement à l'équilibre; la phase reviendra à une valeur éventuellement différente d'un multiple de 2π de sa valeur initiale.

Cette zone centrale, d'autant plus large que P_m est faible (donc τ_n/T grand pour N donné) n'existait pas dans le diagramme de la figure 2.11 calculé pour le système du 2^{ème} ordre quasi-conservatif. Elle ne doit pas être confondue avec le domaine de capture à l'intérieur duquel le système se croche sur un rapport N donné à partir de conditions initiales quelconques.

La figure 4.2 représente la réponse au saut de phase pour quelques valeurs de $\Delta\psi$ à la limite du domaine de convergence, en particulier dans la région de la discontinuité de la courbe 1.

No	b	P_m	T/T_d
1	2	1,33	4,00
1	10	1,33	20,00
2	1	0,80	1,44
3	5	0,60	3,30
4	5	0,36	1,98
5	10	0,20	2,03

Fig. 4.1
Limites d'un saut de phase $\Delta\psi$

4.3 Saut d'amplitude du signal d'entrée

L'amplitude du signal d'entrée passe brusquement de la valeur U_1^- à la valeur

$$U_1 = \alpha U_1^- \quad 4.8$$

U_1' change proportionnellement et la phase va passer de sa valeur d'équilibre avant le saut φ_0^- à une nouvelle valeur

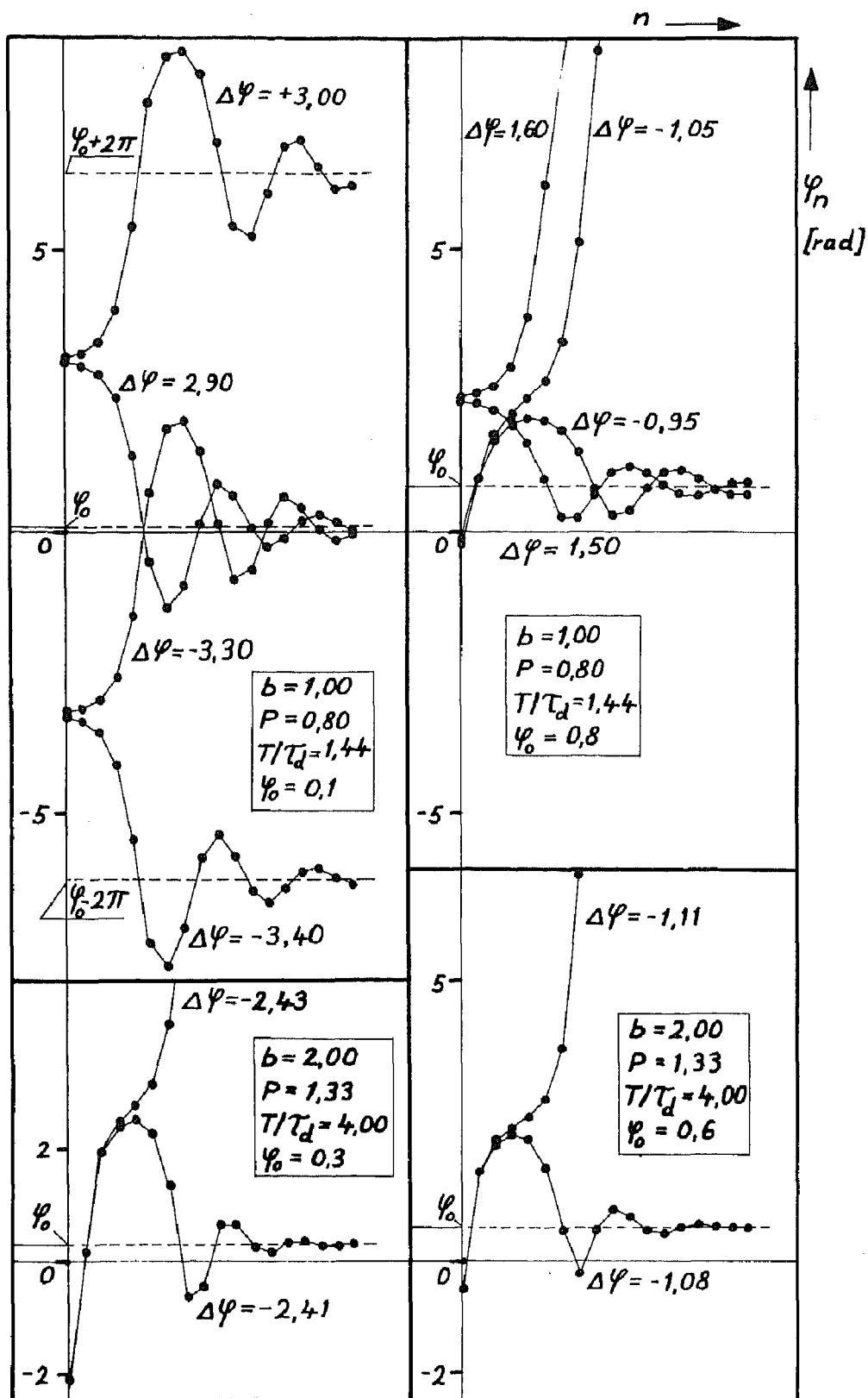


Fig.4.2 Réponses à un saut de phase $\Delta\psi$

d'équilibre φ_0 donnée , d'après la relation 2.48 , par

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_0^- / \alpha \quad 4.9$$

Pour que le diviseur reste croché, φ_0 doit évidemment être inférieur à $\pi/2$ en valeur absolue, donc

$$\alpha \geq |\sin \varphi_0^-| \quad 4.10$$

Cette condition n'est cependant pas suffisante, car le passage de φ_0^- à φ_0 a lieu par une oscillation amortie dont l'amplitude risque de dépasser une valeur critique.

Les phases avant le saut d'amplitude (équilibre φ_0^-) et après ce saut (première valeur φ_1 , équilibre φ_0) sont représentées à la figure 4.3.

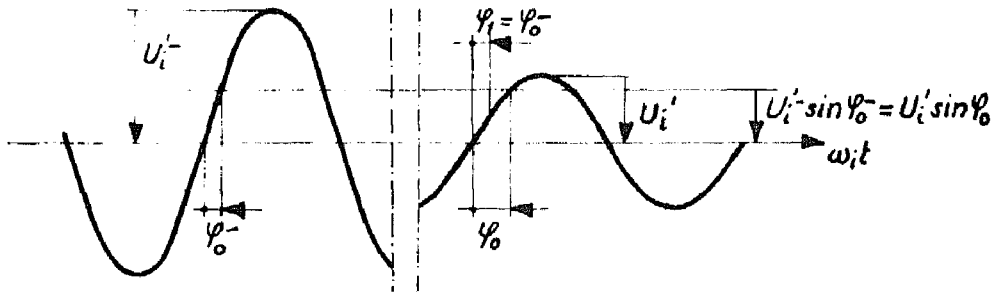


Fig.4.3 Saut d'amplitude

L'état du système n'est pas modifié avant le premier échantillonnage suivant le saut, donc

$$\varphi_1 = \varphi_0^- \quad 4.11$$

La tension v aux bornes de C' ne peut pas subir un saut, donc

$$v_1 = U_1' \sin \varphi_0^- = U_1' \sin \varphi_0 \quad 4.12$$

Au cours du premier échantillonnage, u tend à passer de sa valeur d'équilibre $U_1' \sin \varphi_0$ à la valeur $U_1' \sin \varphi_1$, d'où

$$u_1 = U_1' \sin \varphi_0 + (1-r)(U_1' \sin \varphi_1 - U_1' \sin \varphi_0) \quad 4.13$$

En normalisant u et v (division par U_1^+), on a alors

$$V_1 = \sin \varphi_0 \quad 4.14$$

$$U_1 = (1-r)\sin \varphi_1 + r\sin \varphi_0 \quad 4.15$$

En comparant 4.11, 4.14 et 4.15 avec 4.2 à 4.4, on constate qu'un saut d'amplitude est équivalent à un saut de phase

$$\Delta \varphi = \varphi_0^- - \varphi_0 \quad 4.16$$

On peut donc utiliser les résultats de la figure 4.1 en calculant

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^- &= \varphi_0 + \Delta \varphi \\ \alpha &= \sin \varphi_0^- / \sin \varphi_0 \end{aligned} \right| \quad 4.17$$

pour différents couples $(\varphi_0, \Delta \varphi)$ pris sur la frontière de la région de stabilité.

En ne conservant que les valeurs de φ_0^- ayant même signe que φ_0 (car $\alpha \geq 0$) et inférieures à $\pi/2$ en valeurs absolues (système croché avant le saut), on obtient, pour $b = 1$, $P_m = 0,8$ et $T/\tau_d = 1,44$, le résultat représenté en trait plein à la figure 4.4.

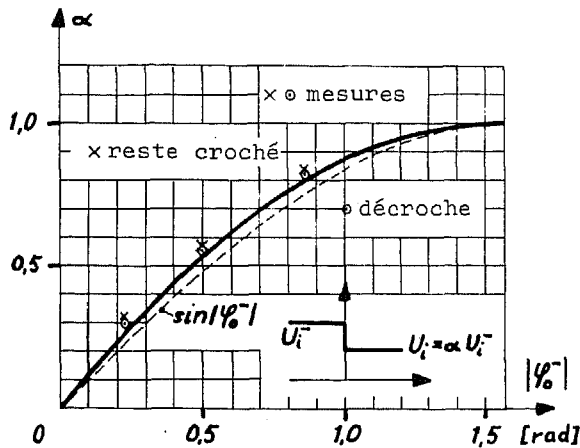


Fig. 4.4
Saut d'amplitude
admissible

La courbe pointillée représente la condition statique 4.10 qui n'est pas très différente, mais toujours moins sévère.

On peut constater que le diviseur ne décroche jamais lors d'une augmentation d'amplitude.

4.4 Variations de température

Les variations de température provoquent des variations des paramètres du système. On étudiera l'effet des plus importantes qui sont la variation de la pulsation ω_{00} du système libre, et celle des capacités C et C' du filtre (importantes si C et C' sont des condensateurs électrolytiques par exemple).

4.4.1 Effet sur la fréquence libre

Une variation $d\theta$ de température provoque une variation relative de ω_{00}

$$d\omega_{00}/\omega_{00} = \frac{\partial \omega_{00}}{\omega_{00} \partial \theta} d\theta = S_{\omega}^{\theta} d\theta \quad 4.18$$

La variation totale de ω_{00} doit être suffisamment petite pour que le système reste dans son domaine d'entraînement. Cette condition statique n'est cependant pas suffisante pour empêcher le décrochage. Il faut tenir compte du phénomène dynamique qui dépend de la façon dont la température, donc ω_{00} , change.

Le pire des cas serait un saut instantané d'un extrême à l'autre du domaine de température. Une telle variation ne se présente heureusement jamais en pratique, à cause des constantes de temps thermiques du système.

On schématisera le problème en supposant que le système forme un bloc sans gradient de température interne (température identique pour tous les éléments du circuit), séparé du milieu ambiant par un filtre passe-bas thermique du premier ordre caractérisé par une constante de temps τ_{th} .

Après un saut de la température ambiante, la variation de la température interne, donc de ω_{00} , prendra l'allure exponentielle représentée à la figure 4.5

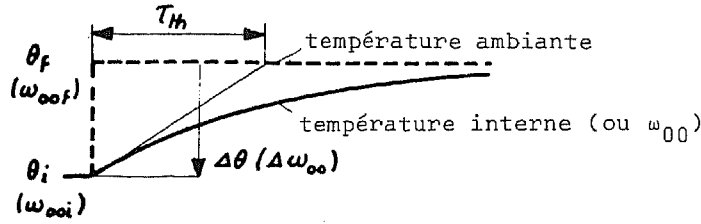


Fig.4.5 Effet d'un saut de la température ambiante

ω_{00} passe donc de la valeur initiale ω_{00i} à la valeur finale ω_{00f} selon l'équation

$$\omega_{00} = \omega_{00i} + (1 - e^{-t/\tau_{th}})(\omega_{00f} - \omega_{00i}) \quad 4.19$$

Cette variation lente correspond à une phase d'équilibre lentement variable qu'on peut calculer en annulant identiquement $\dot{\omega}_i$ et $\dot{\varphi}$ (donc $\ddot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$) dans l'équation 3.8, ce qui donne

$$K_m \sin \varphi_0 = \omega_i - N\omega_{00} - \tau(1+b)N\dot{\omega}_{00} - \tau^2 ab N \ddot{\omega}_{00} \quad 4.20$$

En introduisant l'expression 4.19 de ω_{00} et sachant par l'équation 2.48 que les phases initiale et finale sont liées aux valeurs correspondantes de ω_{00} par la relation

$$K_m \sin \varphi_{0i(f)} = \omega_i - N\omega_{00i(f)} \quad 4.21$$

on obtient

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_{0f} - (\sin \varphi_{0f} - \sin \varphi_{0i})(1 - (1+b)\tau/\tau_{th} + \tau^2 ab/\tau_{th}^2)e^{-t/\tau_{th}} \quad 4.22$$

τ ne peut pas être très supérieur à τ_{th} ; compte tenu de la condition 3.3, on peut donc négliger le terme en τ^2 et écrire

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_{0f} - (\sin \varphi_{0f} - \sin \varphi_{0i})(1 - (1+b)\tau/\tau_{th})e^{-t/\tau_{th}} \quad 4.23$$

Cette relation est représentée à la partie supérieure de la figure 4.6 pour les deux cas $(1+b)\tau < \tau_{th}$ et $(1+b)\tau > \tau_{th}$.

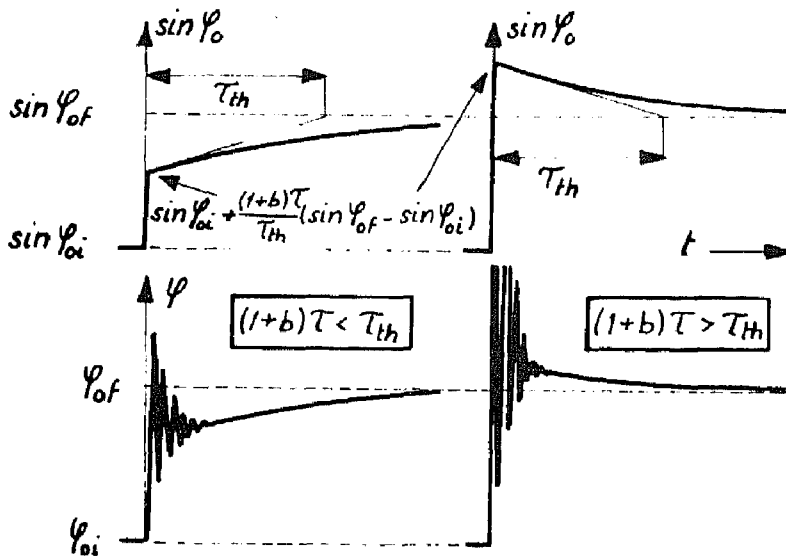


Fig.4.6 Phase d'équilibre et oscillation de phase après un saut de la température ambiante

On voit que la phase d'équilibre subit un saut au moment du saut de température. La phase atteindra cette valeur d'équilibre après une oscillation amortie illustrée au bas de la même figure. Cette oscillation risque de provoquer une perte de synchronisme, même si la phase finale $|\varphi_{of}|$ est inférieure à $\pi/2$.

Pour un système optimisé, l'amortissement a lieu avec une constante de temps bien inférieure à $\tau \cdot (1 + b)$ et à τ_{th} . On peut admettre que l'angle d'équilibre durant l'amortissement est constant et égal à sa valeur juste après le saut de température:

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_{oi} + (\sin \varphi_{of} - \sin \varphi_{oi}) (1+b) \tau / \tau_{th} \quad 4.24$$

ou, à l'aide de 4.21, 4.18 et 3.11

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_{oi} - \frac{\tau_r}{\tau_{th}} S_w^\theta \Delta \theta \quad 4.25$$

où $\Delta \theta$ est le saut de température.

On admettra que la limite de stabilité est la même que celle d'un système du deuxième ordre continu quasi-conservatif écarté de sa phase d'équilibre φ_0 donnée par 4.25 par un saut de phase

$$\Delta\varphi = \varphi_{0i} - \varphi_0 \quad 4.26$$

La faible différence entre les résultats obtenus comme limite d'un saut de phase pour le système du deuxième ordre continu conservatif d'une part (figure 2.11) et pour le système du troisième ordre échantillonné d'autre part (figure 4.1) porte à penser que l'approximation ci-dessus n'est pas trop grossière.

La figure 2.11 et les relations 4.25 et 4.26 permettent alors de calculer le domaine de stabilité représenté à la figure 4.7.

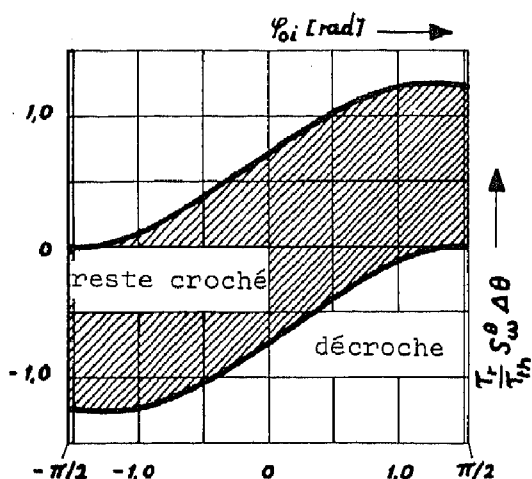


Fig.4.7 Saut maximum de température ambiante

Le système restera croché si le saut de température est suffisamment faible (ou la constante de temps thermique τ_{th} suffisamment grande) pour que le point caractéristique reste à l'intérieur du domaine hachuré, ceci pour autant que la phase d'équilibre finale $|\varphi_{0f}|$ soit inférieure à $\pi/2$ (condition statique).

4.4.2 Effet sur les capacités du filtre

On admet que les deux capacités ont le même coefficient de température (donc b constant) et

$$dC/C = S_C^\theta d\theta \quad 4.27$$

Pour des raisons pratiques (voir ch.7) les tensions réelles aux bornes de C et C' sont respectivement égales à

$$u_C = U_{C0} + u \quad 4.28$$

$$v_C = U_{C0} + v \quad 4.29$$

où U_{C0} est une tension de polarisation constante qui n'a aucune influence sur le comportement dynamique du système, sauf si les capacités varient.

Le filtre continu du second ordre comprenant cette polarisation est représenté à la figure 4.8

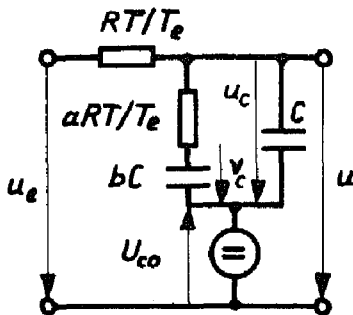


Fig.4.8 Filtre du second ordre avec polarisation

Comme en général

$$|U_{C0}| \gg |u| \text{ et } |v| \quad 4.30$$

on obtient comme équation du filtre

$$\begin{aligned} ab\tau^2 \ddot{u} + (\tau(1+b) + ab\tau^2 \dot{C}/C + ab\tau) \dot{u} + u = \\ u_e + ab\tau \dot{u}_e - \tau(1+b)U_{C0} \dot{C}/C - ab\tau^2 U_{C0} \ddot{C}/C \end{aligned} \quad 4.31$$

En tirant (u, \dot{u}, \ddot{u}) de 1.2 et 1.3, et (u_e, \dot{u}_e) de 1.5, en admettant que ω_{00} varie selon 4.19 et C selon

$$C = C_i + \Delta C(1 - e^{-t/\tau_{th}}) \quad 4.32$$

et en laissant tomber les termes négligeables pour $\Delta C/C < 1$ et τ pas trop supérieur à τ_{th} , on obtient comme phase d'équilibre juste après le saut de température

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_{0i} - \left(\frac{N\omega_{00}}{K_m} \cdot \frac{\Delta\omega_{00}}{\omega_{00}} - \frac{U_{C0}}{U_{i'}} \cdot \frac{\Delta C}{C} \right) (1+b) \tau / \tau_{th} \quad 4.33$$

ou, à l'aide des relations 2.52, 4.18 et 4.27

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi_{0i} - \frac{\tau_r}{\tau_{th}} \left(1 - \frac{U_{C0}}{U_{i'}} \cdot \frac{S_c^\theta}{S_w^\theta} \cdot \frac{D_e}{2} \right) S_w^\theta \Delta\theta \quad 4.34$$

En comparant avec la relation 4.25, on voit qu'on peut tenir compte du coefficient de température des capacités du filtre en remplaçant dans la figure 4.7 τ_{th} par

$$\tau'_{th} = \tau_{th} / \left(1 - \frac{U_{C0}}{U_{i'}} \cdot \frac{S_c^\theta}{S_w^\theta} \cdot \frac{D_e}{2} \right) \quad 4.35$$

4.5 Bruit

4.5.1 Introduction

Dans l'approximation linéaire, on a optimisé le système de façon à minimiser la variance de l'écart statistique de phase dû aux jitters de l'oscillateur local et de la source, en admettant une suite de sauts de phase perturbateurs non corrélés dans le temps.

Même si cette variance est petite, il existe une probabilité finie pour que le système décroche sous l'effet de ces perturbations au cours d'une période d'échantillonnage donnée.

Pour déterminer cette probabilité, on doit faire intervenir le caractère non-linéaire du système.

Ce problème a été étudié par divers auteurs, en relation avec l'application des boucles continues d'asservissement de phase au "tracking" radio des engins spatiaux. En particulier, Viterbi [20] a développé une solution analytique exacte dans le cas de la boucle du premier ordre (sans filtre); Sannemann et Rowbotham [21] ont obtenu des résultats numériques sur un type particulier de boucle du deuxième ordre, en simulant le système et les sources de bruit sur

une calculatrice digitale; Shakhtarin et Shchepkin [22] ont publié une étude expérimentale sur un système du deuxième ordre.

Ces résultats ne sont malheureusement pas applicables à notre système échantillonné du troisième ordre. On essaiera de faire une estimation de la probabilité de décrochage au cours d'une période donnée à partir d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

4.5.2 Estimation de la probabilité de décrochage

Hypothèses:

1. L'écart-type de phase est beaucoup plus petit que 1 radian. La probabilité p recherchée est donc très petite.
2. La réponse du système à un petit saut de phase perturbateur s'amortit en quelques périodes d'échantillonnage (voir la figure 3.6).
3. La répartition des écarts statistiques de phase est gaussienne, même pour des écarts beaucoup plus grands que l'écart-type.
4. La phase d'équilibre est voisine de zéro.
5. La probabilité pour que le vecteur (à 3 dimensions) décrivant l'état du système sorte d'une région (volume) de stabilité et retombe dans une autre région de stabilité (donnée par la périodicité 2π de ψ_0) est négligeable.
6. La probabilité de décrochage ne change pas si on remplace la non-linéarité sinusoïdale du détecteur de phase par la non-linéarité en dent de scie représentée à la figure 4.9

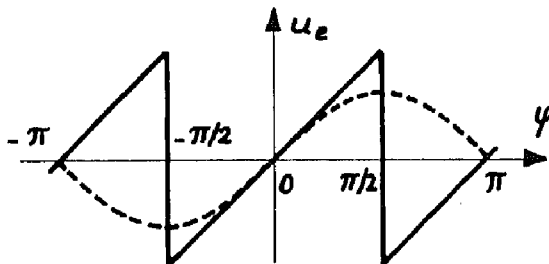


Fig.4.9 Non-linéarité en dent de scie

Cette dernière hypothèse, très artificielle, peut être rendue vraisemblable par le raisonnement suivant:

Le bruit a été minimisé pour un gain de la boucle correspondant à l'angle d'équilibre φ_0 , voisin de zéro; ce gain varie peu tant que la phase d'échantillonnage φ reste un peu inférieure à $\pi/2$.

Par contre, lorsque φ atteint et dépasse $\pi/2$, le gain change considérablement puisqu'il s'annule pour changer de signe; l'optimisation effectuée n'est alors certainement plus valable et le bruit augmente dans une proportion importante, provoquant rapidement le décrochage.

Avec une telle non-linéarité, on peut admettre que le système décroche dès que la phase dépasse $\pi/2$ en valeur absolue: en effet, en conséquence des hypothèses 1 et 2, on peut négliger la probabilité que les quelques perturbations consécutives importantes, nécessaires à amener le système en dehors de la région de stabilité, soient suivies suffisamment rapidement par une ou plusieurs autres perturbations importantes le ramenant dans la région de stabilité.

Ces différentes hypothèses permettent d'assimiler p à la probabilité pour que la phase dépasse $\pi/2$ dans l'approximation linéaire.

La répartition des écarts de phase est gaussienne; la probabilité d'un écart compris entre y et $y + dy$ est donc

$$f(y)dy = \frac{e^{-y^2/2\sigma_y^2}}{(2\pi)^{1/2}\sigma_y} dy \quad 4.36$$

et la probabilité que la phase dépasse $\pi/2$ en valeur absolue

$$p = 1 - \int_{-(\pi/2+\varphi_0)}^{\pi/2-\varphi_0} f(y)dy \quad 4.37$$

ou, en normalisant y à son écart-type

$$p = 1 - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-Y_1}^{Y_2} e^{-Y^2/2} dY \quad 4.38$$

avec $Y = y/\sigma_y$ 4.39

et $Y_{1(2)} = (\pi/2(\pm)\varphi_0)/\sigma_y$ 4.40

Si $\sigma_y \ll \pi/2 \pm \varphi_0$, on obtient par un développement en série de 4.38 [23]

$$p = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{e^{-Y_1^2/2}}{Y_1} + \frac{e^{-Y_2^2/2}}{Y_2} \right) \quad 4.41$$

Cette relation est représentée à la figure 4.10

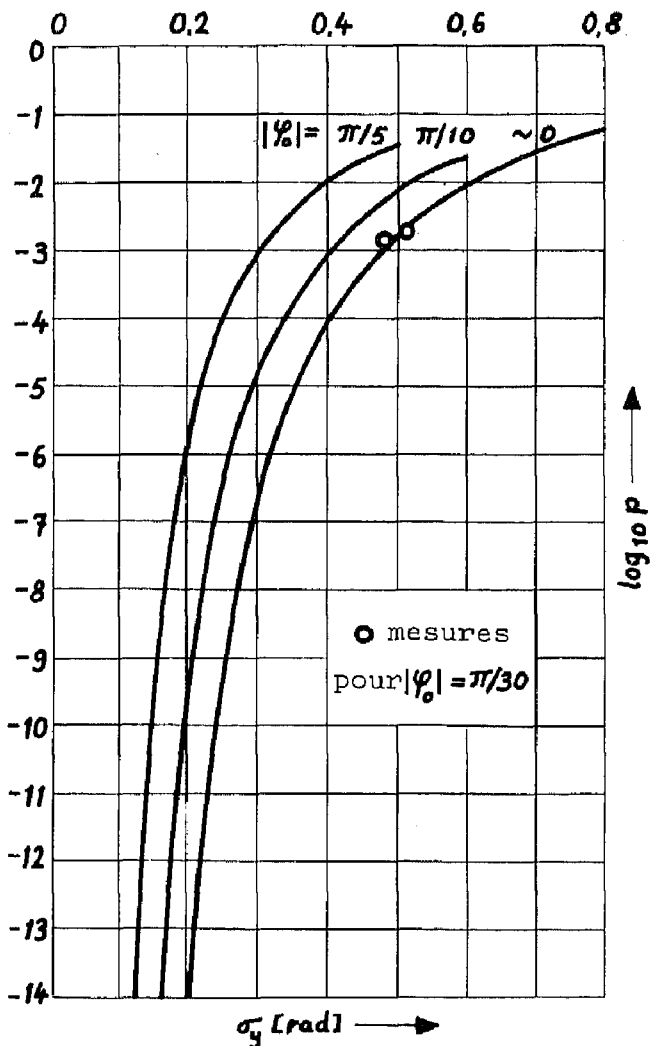


Fig.4.10 Probabilité de décrochage au cours d'une période T donnée

Notons que pour φ_0 strictement égal à zéro, on ne peut plus parler de probabilité de décrochage puisque le système travaille alors dans son domaine de capture.

4.5.3 Statistique du nombre de périodes avant décrochage

p est la probabilité pour que le diviseur décroche au cours de la période considérée. La probabilité de décrochage au cours de n périodes est alors

$$p_n = 1 - (1-p)^n \quad 4.42$$

Soit n_p le nombre probable de périodes jusqu'au décrochage, tel que les probabilités de décrochage avant et après n_p périodes soient égales; on a donc

$$(1-p)^{n_p} = 0,5 \quad 4.43$$

ou, en prenant le logarithme naturel des deux membres

$$n_p \ln(1-p) = -\ln 2$$

Si $p \ll 1$, le développement en série [24]

$$\ln(1-p) = -(p + p^2/2 + p^3/3 + \dots)$$

se réduit à son premier terme, ce qui donne

$$n_p = \ln 2 / p \quad 4.44$$

5. ETUDE DU MULTIVIBRATEUR

5.1 Introduction

L'oscillateur asservi sera constitué d'un circuit multivibrateur à couplages collecteurs-bases dont le schéma tout à fait classique est représenté à la figure 5.1.

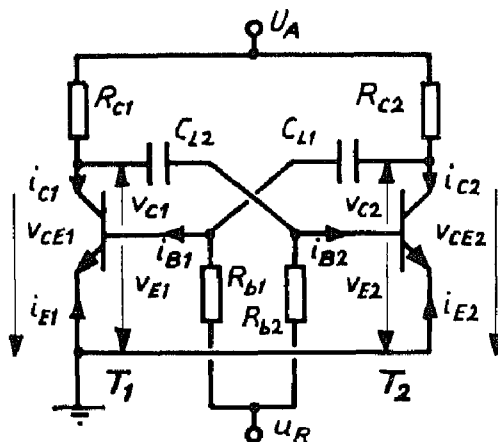


Fig. 5.1 Circuit multivibrateur

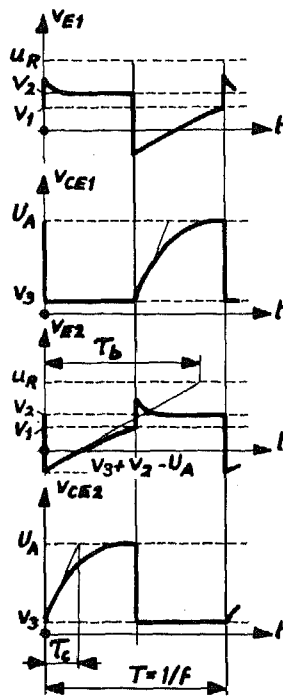
Un tel circuit présente par rapport à un oscillateur sinusoïdal l'avantage de fournir un signal à transitions brutales à partir duquel il est aisé de former les impulsions commandant l'interrupteur d'échantillonnage.

On étudiera la relation entre la tension de réglage u_R et la fréquence d'oscillation f , ainsi que les facteurs affectant la stabilité de fréquence à long terme et à court terme; cette dernière nécessite une analyse détaillée du processus non-linéaire de commutation.

On supposera que le circuit est parfaitement symétrique et que les courants inverses des transistors sont négligeables.

5.2 Fréquence d'oscillation et conditions de fonctionnement correct

L'évolution dans le temps des tensions définies à la figure 5.1 est représentée à la figure 5.2 où



$$\tau_b = R_b C_L \quad 5.1$$

$$\tau_c = R_c C_L \quad 5.2$$

On définit provisoirement

V_1 = valeur critique de v_E provoquant la commutation

V_2 = valeur de v_E pour un transistor saturé

V_3 = valeur de v_{CE} pour un transistor saturé

Fig. 5.2 Diagramme des tensions

Pour que le circuit fonctionne convenablement, deux conditions doivent être réalisées:

a. La tension de collecteur d'un transistor bloqué doit avoir pratiquement atteint U_A avant que ce transistor se sature, donc

$$e^{-T/2\tau_c} \ll 1 \quad 5.3$$

b. Tant que l'un des transistors est bloqué, l'autre doit rester saturé, donc

$$\beta_F \left(\frac{U_R - V_2}{R_b} + \frac{U_A - V_3}{R_c} e^{-t/\tau_c} \right) > \frac{U_A - V_3}{R_c} + \frac{U_A + U_R - V_2 - V_3}{R_b} e^{-t/\tau_b} \quad 5.4$$

β_F étant le gain de courant i_C/i_B

Comme 5.3 impose généralement $\tau_C < \tau_b$, le terme e^{-t/τ_C} s'amortit assez rapidement et 5.4 peut être remplacée par la condition plus sévère mais plus simple

$$u_R > V_2 + \frac{U_A - V_3}{\beta_F - 1} (1 + R_b/R_C) \quad 5.5$$

En négligeant le temps de commutation par rapport à la période T , on calcule facilement

$$2\tau_{bf} = \left(\ln \frac{U_A + u_R - V_2 - V_3}{u_R - V_1} \right)^{-1} \quad 5.6$$

5.3 Calcul de l'état métastable

Le phénomène lent de relaxation, de constante de temps τ_b , entraîne une évolution de l'état des transistors du circuit à réaction que constitue le multivibrateur. On appelle état métastable l'état correspondant au seuil critique de réaction, à partir duquel la commutation va être déclenchée.

5.3.1 Equations des transistors

Les transistors peuvent être décrits analytiquement par les équations de Ebers-Moll [25]

$$i_E = -I_{ES} (e^{v_E/V_B} - 1) + \alpha_R I_{CS} (e^{v_C/V_B} - 1) \quad 5.7$$

$$i_C = \alpha_F I_{ES} (e^{v_E/V_B} - 1) - I_{CS} (e^{v_C/V_B} - 1) \quad 5.8$$

$$I_{ES} = I_{E0} / (1 - \alpha_F \alpha_R) \quad 5.9$$

$$I_{CS} = I_{C0} / (1 - \alpha_F \alpha_R) \quad 5.10$$

$$\alpha_F I_{ES} = \alpha_R I_{CS} \quad 5.11$$

avec

$V_B = k\theta/e$ tension de Boltzmann 5.12

θ température absolue (T désigne la période)

e charge élémentaire

α_F gain de courant en montage base commune, transistor connecté normalement

α_R gain de courant en montage base commune, collecteur et émetteur permutés

v_C, v_E tensions aux bornes des jonctions de collecteur et d'émetteur respectivement; positives dans le sens de conduction.

i_C, i_E courants entrant dans le collecteur et dans l'émetteur respectivement.

I_{C0} valeur de i_C pour $i_E = 0$ et $v_C \ll -V_B$
(courant inverse de la jonction de collecteur)

I_{E0} valeur de i_E pour $i_C = 0$ et $v_E \ll -V_B$
(courant inverse de la jonction d'émetteur)

I_{C0} et I_{E0} sont positifs pour les transistors NPN. En réalité, pour les transistors au Si, ces courants doivent être considérés comme des courants caractéristiques de diffusion des jonctions correspondantes; les courants inverses réels, beaucoup plus grands, sont dûs au processus de recombinaison-génération dans les zones de charge d'espace.

On peut montrer [26] que ces équations, établies pour les transistors alliés, restent valables pour les transistors ayant un gradient d'impuretés dans la base, tels les transistors diffusés.

Pour de petites variations (indices en minuscules) autour d'un point de travail (indices en majuscules), les équations 5.7 et 5.8 peuvent être linéarisées. On distinguera le transistor saturé dont les deux jonctions conduisent, du transistor amplifiant dont la jonction de collecteur est bloquée.

Le transistor bloqué dont les deux jonctions sont bloquées représente un cas trivial.

5.3.1.1 Transistor saturé

$$v_E \gg V_B \text{ et } v_C \gg V_B$$

$$\text{On obtient } i_e = -g_e v_e + g_r v_c \quad 5.13$$

$$i_c = g_f v_e - g_c v_c \quad 5.14$$

avec

$$g_e = -\left. \frac{\partial i_E}{\partial v_E} \right|_{v_C \text{ const.}} = \frac{I_{ES}}{V_B} e^{v_E/V_B} \text{ conductance d'émetteur} \quad 5.15$$

$$g_c = -\left. \frac{\partial i_C}{\partial v_C} \right|_{v_E \text{ const.}} = \frac{I_{CS}}{V_B} e^{v_C/V_B} \text{ conductance de collecteur} \quad 5.16$$

$$g_f = \left. \frac{\partial i_C}{\partial v_E} \right|_{v_C \text{ const.}} = \frac{\alpha_F I_{ES}}{V_B} e^{v_E/V_B} \text{ transconductance directe} \quad 5.17$$

$$g_r = \left. \frac{\partial i_E}{\partial v_C} \right|_{v_E \text{ const.}} = \frac{\alpha_R I_{CS}}{V_B} e^{v_C/V_B} \text{ transconductance inverse} \quad 5.18$$

On peut exprimer ces différentes conductances en fonction des courants de travail i_C et i_B . Sachant que $i_B = -(i_C + i_E)$, on obtient

$$g_e = g_f / \alpha_F = \frac{i_B + (1 - \alpha_R) i_C}{V_B (1 - \alpha_F \alpha_R)} \quad 5.19$$

$$g_c = g_r / \alpha_R = \frac{\alpha_F i_B - (1 - \alpha_F) i_C}{V_B (1 - \alpha_F \alpha_R)} \quad 5.20$$

On peut encore exprimer les tensions de travail v_E et v_C en fonction des courants de travail i_B et i_C . Les équations 5.15, 5.16, 5.19 et 5.20 donnent

$$v_E / V_B = \ln \frac{g_e V_B}{I_{ES}} = \ln \frac{i_B + (1 - \alpha_R) i_C}{I_{E0}} \quad 5.21$$

$$v_C/v_B = \ln \frac{g_C V_B}{I_{CS}} = \ln \frac{\alpha_F i_B - (1-\alpha_F) i_C}{I_{C0}} \quad 5.22$$

si

$$1-\alpha_F \ll 1 \text{ et } 1-\alpha_F \ll i_B/i_C \ll 1-\alpha_R \quad 5.23$$

les relations 5.21 et 5.22 deviennent

$$v_E = V_B \ln(i_C/I_{ES}) \quad 5.24$$

$$v_C = V_B \ln(i_B/I_{C0}) \quad 5.25$$

5.3.1.2 Transistor amplifiant

$$v_E \gg V_B \text{ et } v_C \ll -V_B$$

Alors $i_e = -g_e v_e \quad 5.26$

$$i_c = g_f v_e \quad 5.27$$

avec $g_f = \alpha_F g_e = i_C/V_B \quad 5.28$

On peut également exprimer v_E en fonction de i_C ; 5.8 donne

$$v_E/V_B = \ln \frac{i_C}{\alpha_F I_{ES}} \quad 5.29$$

ou si $1-\alpha_F \ll 1$

$$v_E = V_B \ln(i_C/I_{ES}) \quad 5.30$$

5.3.2 Etat métastable

Soient T_1 bloqué et T_2 saturé.

Comme le montre la figure 5.2, la tension v_{E1} tend exponentiellement vers u_R , la capacité C_{L1} se chargeant à travers R_{b1} .

Dès que v_{E1} devient positif, le transistor T_1 commence à conduire et un courant de collecteur i_{C1} apparaît provoquant une diminution du courant de base de T_2 qui devient moins saturé. Il s'ensuit une augmentation de la tension v_{CE2} , transmise à la base de T_1 à travers C_{L1} . L'état métastable est atteint dès que le gain de la boucle vaut $+1$.

Hypothèses

1. La résistance R_{C2} et l'ensemble R_{b1}, C_{L1} peuvent être remplacés par une source de courant de valeur

$$I_{CM} = \frac{U_A - V_3}{R_c} + \frac{u_R - V_1}{R_b} \quad 5.31$$

2. La résistance R_{b2} peut être remplacée par une source de courant de valeur

$$I_{BM} = \frac{u_R - V_2}{R_b} \quad 5.32$$

3. La résistance R_{C1} est négligeable; tout le courant i_{C1} traverse C_{L2} .
4. T_1 a un gain élevé; son circuit de base représente pour T_2 une charge négligeable.

Dans ces conditions, l'état métastable est atteint lorsque

$$-\frac{i_{C1}}{v_{e1}} \cdot \frac{v_{e2} - v_{c2}}{i_{b2}} = 1 \quad 5.33$$

Pour $i_C = 0$ ($i_C = I_{CM}$ constant), les équations 5.13 à 5.18 permettent de calculer pour le transistor saturé

$$\frac{v_e - v_c}{i_b} = V_B \left((i_B + (1 - \alpha_R) i_C)^{-1} - \left(i_B - \frac{1 - \alpha_F}{\alpha_F} i_C \right)^{-1} \right) \quad 5.34$$

résistance de transfert du transistor saturé.

Si les conditions 5.23 sont réalisées, on a simplement

$$\frac{v_e - v_c}{i_b} = -V_B / i_B \quad 5.35$$

D'autre part, 5.27 et 5.28 donnent pour le transistor amplifiant

$$i_c / v_e = i_c / V_B \quad 5.36$$

En introduisant 5.35 et 5.36 dans 5.33, on obtient, pour le point métastable

$$i_{C1} = i_{B2} = I_{BM}/2 \quad 5.37$$

puisque, comme conséquence de l'hypothèse 3

$$i_{B2} = I_{BM} - i_{C1}$$

Contrôle des hypothèses

Si la condition 5.23 est réalisée, on peut montrer que pour $i_{B2} \geq I_{BM}/2$

$$v_{e2} / i_{b2} \ll R_b \quad \text{si } u_R - V_2 \gg V_B$$

$$\text{et} \quad v_{ce2} / i_{c2} \ll R_c \quad \text{si } 2(1 - \alpha_R) I_{CM} / I_{BM} \ll U_A / V_B$$

Les hypothèses 1 et 2 sont alors valables.

D'autre part, on peut écrire

$$\frac{di_{C1}}{dt} = \frac{di_{C1}}{dv_{E1}} \cdot \frac{dv_{E1}}{dt}$$

Le courant i_{C1} passe lorsque v_{E1} est de l'ordre de grandeur de V_1 et V_2 , donc lorsque

$$dv_{E1}/dt \approx (u_R - V_2) / \tau_b$$

On obtient alors à l'aide de la relation 5.30

$$\frac{di_{C1}}{dt} = \frac{i_{C1}}{V_B} \cdot \frac{u_R - V_2}{\tau_b}$$

Admettons que le courant i_R à travers R_{C1} est négligeable. Le courant i_{C1} traversant C_{L2} provoque à ses bornes une variation de tension

$$\Delta u_2(i_{C1}) = \frac{1}{C_L} \int_0^t i_{C1} dt = \frac{V_B R_b}{u_R - V_2} \cdot i_{C1} \quad 5.38$$

qui apparaît aux bornes de R_{C1} (car v_{E2} est constante, relation 5.24) et provoque à travers cette résistance un courant

$$i_R = \frac{V_B}{u_R - V_2} \cdot \frac{R_b}{R_c} \cdot i_{C1} \ll i_{C1}$$

l'hypothèse 3 est donc vérifiée.

La condition 5.23 peut se ramener à

$$2(1-\alpha_F) \ll \frac{u_R - V_2}{u_A - V_3} \cdot \frac{R_c}{R_b} \ll 1 - \alpha_R \quad 5.39$$

Elle est généralement assez bien remplie.

5.4 Calcul des tensions V_1 , V_2 et V_3

En établissant l'équation 5.6 donnant la fréquence d'oscillation du multivibrateur, on a négligé, outre le temps de commutation, la petite variation de tension Δu_2 aux bornes de C_{L2} et la légère augmentation de v_{CE2} survenant juste avant la commutation. On tiendra compte de ces deux effets en modifiant légèrement V_1 et V_3 par rapport aux définitions de la figure 5.2.

On posera

$$V_1 = v_{E1}(i_{C1} = I_{BM}/2) + v_{CE2}(i_{B2} = I_{BM}) - v_{CE2}(i_{B2} = I_{BM}/2) \quad 5.40$$

$$V_2 = v_{E2}(i_{B2} = I_{BM}) \quad 5.41$$

$$V_3 = v_{CE2}(i_{B2} = I_{BM}) + \Delta u_2(i_{C1} = I_{BM}/2) \quad 5.42$$

avec $i_{C2} = I_{CM}$, Δu_2 donné par 5.38, et $v_{CE} = v_E - v_C$

Les tensions V_1 et V_3 ainsi définies ne sont plus mesurables directement.

En utilisant les relations 5.24, 5.25 et 5.30, on obtient après abandon des indices 1 et 2

$$V_1 = V_B \ln \frac{I_{BM}}{4I_{ES}} \quad 5.43$$

$$V_2 = V_B \ln \frac{I_{CM}}{I_{ES}} \quad 5.44$$

$$V_3 = V_B \left(\ln \frac{(1-\alpha_R)I_{CM}}{\alpha_R I_{BM}} + \frac{1}{2} \right) \quad 5.45$$

On peut remarquer que V_1 , V_2 et V_3 figurent dans les expressions 5.31 et 5.32 de I_{BM} et I_{CM} .

Il ne s'agit en fait que de petites corrections pour lesquelles il suffit d'utiliser les valeurs approximatives des trois tensions.

5.5 Caractéristique de réglage

Les relations 5.43 à 5.45 montrent que les tensions V_1 , V_2 et V_3 dépendent de I_{CM} et I_{BM} , donc de U_A et u_R . Cette dépendance est cependant suffisamment faible (fonction logarithmique) pour qu'on puisse admettre que ces trois tensions sont constantes tant que u_R et U_A ne changent pas d'ordre de grandeur et tant que u_R est suffisamment supérieur à V_2 . On rencontrera en pratique des valeurs de l'ordre de

$$V_1 = 350 \text{ mV} \quad \text{et} \quad V_2 + V_3 = 550 \text{ mV}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation 5.6, on obtient, pour $U_A = 1,3V$, la caractéristique de réglage No 1 de la figure 5.3. La caractéristique No 2 est valable quelle que soit U_A lorsque V_1 , V_2 et V_3 sont négligeables.

Lorsque u_R est de l'ordre de grandeur de U_A :

$$df/du_R = \frac{0,5 \text{ à } 0,6}{T_D U_A} \quad 5.46$$

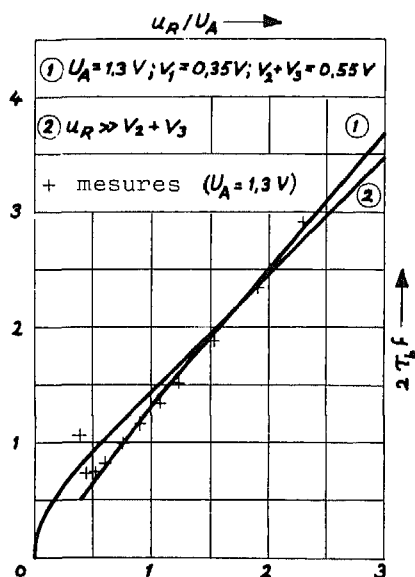


Fig. 5.3 Caractéristique de réglage

5.6 Influence de la température

Les tensions V_1 et V_2 données par 5.43 et 5.44 correspondent à la tension aux bornes d'une diode d'équation

$$i = I_{ES} (e^{u/V_B} - 1)$$

conduisant un courant

$$i = I_{BM}/4 \gg I_{ES} \quad \text{pour } V_1$$

$$i = I_{CM} \gg I_{ES} \quad \text{pour } V_2$$

On peut calculer pour une diode [27]

$$\left. \frac{du}{d\theta} \right|_{i=\text{const.}} \approx \frac{u - U_G}{\theta}$$

où U_G est la largeur de la bande interdite du semiconducteur, exprimée en volts. Donc

$$\frac{dV_{1(2)}}{d\theta} = \frac{V_{1(2)} - U_G}{\theta} \quad 5.47$$

Pour $U_G = 1,1V$ (silicium) et $\theta \approx 300^{\circ}K$, des tensions V_1 et V_2 comprises entre 0,2 et 0,5V varient de -2 à $-3mV/^{\circ}K$.

La relation 5.45 montre que V_3 varie peu avec la température si sa valeur ne dépasse pas une centaine de millivolts; en effet

$$\frac{dV_3/V_3}{d\theta} = \frac{dV_B/V_B}{d\theta} = 0,33\%/^{\circ}K \text{ à } 300^{\circ}K$$

En négligeant la variation de V_3 et en admettant que les variations de V_1 et V_2 sont identiques, on obtient à partir de la relation 5.6

$$\frac{d(\tau_{bf})}{\tau_{bf} d\theta} = -\frac{dV_1}{d\theta} \cdot \frac{U_A + V_1 - V_2 - V_3}{(U_R - V_1)(U_A + U_R - V_2 - V_3)} \cdot \left(\ln \frac{U_A + U_R - V_2 - V_3}{U_R - V_1} \right)^{-1} \quad 5.48$$

Cette relation correspond à la courbe No 1 de la figure 5.4, calculée pour

$$V_1 = 0,35V, V_2 + V_3 = 0,55V, U_A = 1,3V \text{ et } \frac{dV_1}{d\theta} = -2,5mV/^{\circ}K$$

La courbe No 2 est valable quelle que soit U_A , dès que V_1 , V_2 et V_3 sont négligeables dans l'équation 5.48.

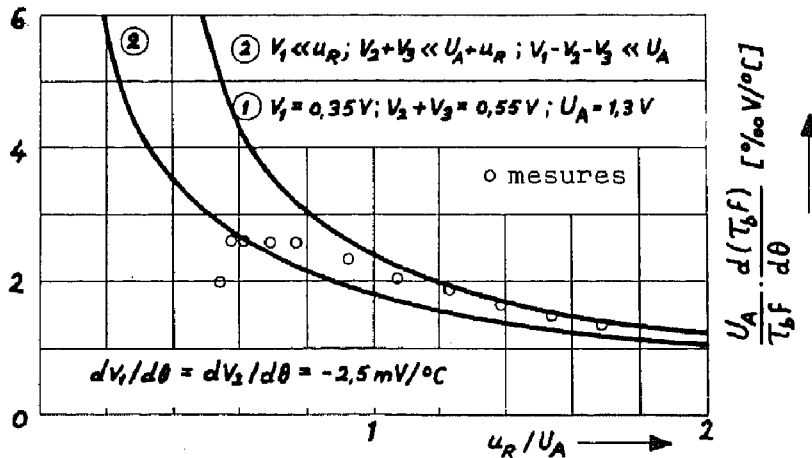


Fig. 5.4 Influence de la température sur la fréquence d'oscillation f

On remarque que l'influence de la température est inversement proportionnelle à la tension d'alimentation U_A .

L'examen de la relation 5.6 montre que si les variations de V_1 et V_2 sont identiques, elles peuvent être compensées par une variation parallèle de u_R .

5.7 Analyse du processus de commutation

5.7.1 Circuit équivalent et équation de commutation

En calculant la fréquence d'oscillation du multivibrateur (relation 5.6), on a admis que le circuit commutait dès que la tension v_{E1} atteignait la valeur critique V_1 .

En réalité, la commutation n'est pas instantanée, car elle est ralentie par les capacités parasites présentes dans le circuit.

Pour simplifier l'analyse, on supposera que l'une de ces capacités parasites a un effet prédominant, ou que l'effet de l'ensemble des capacités est identique à celui d'une seule capacité connectée entre deux points donnés du circuit.

En un instant proche de la commutation, la caractéristique courant-tension mesurée entre ces deux points est obligatoirement du type "diode tunnel", c'est-à-dire stable en tension. L'allure d'une telle caractéristique est illustrée par la figure 5.5 où est également représenté le point de travail P_1 (courant à peu près nul tant que la tension varie lentement).

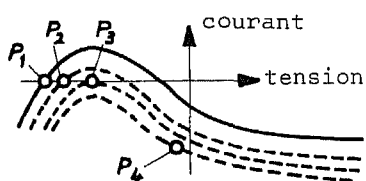


Fig. 5.5 Caractéristique de commutation

Lorsque le phénomène lent de relaxation progresse, l'ensemble de la caractéristique se déplace lentement vers le bas, en se déformant éventuellement, et le point de travail s'approche du sommet (P_2); lorsque le sommet est atteint (P_3), le circuit commute et la tension augmente, d'abord lentement dans la région de P_3 , puis très rapidement dans la région de

P_4 où le point caractéristique est éloigné de l'axe des tensions (grand courant dans la capacité). Le retard de commutation est donc dû principalement à l'augmentation lente de tension au voisinage de P_3 , où la caractéristique peut être assimilée à une parabole.

On étudiera cette commutation au moyen du circuit équivalent représenté à la figure 5.6a.

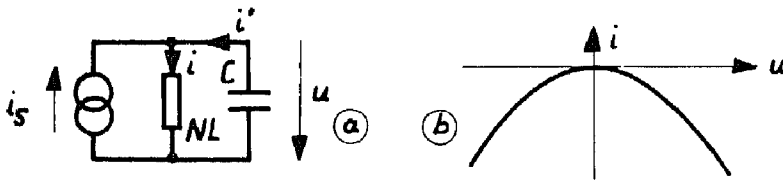


Fig. 5.6 Circuit équivalent pour l'étude de la commutation

C est la capacité parasite. NL est une résistance non-linéaire dont la caractéristique parabolique

$$i = -pu^2 \quad \text{avec } p > 0 \quad 5.49$$

est représentée à la figure 5.6b.

La source i_s fournit un courant croissant lentement, correspondant à l'évolution lente de la caractéristique de commutation au cours du phénomène de relaxation. En choisissant l'origine du temps convenablement, on peut décomposer i_s en série de puissances sans terme constant

$$i_s = qt + q't^2 + q''t^3 + \dots$$

Si les termes de degré supérieur à 1 restent suffisamment petits au cours de la commutation, on peut poser

$$i_s = qt \quad \text{avec } q > 0 \quad 5.50$$

Au temps $t = 0$, i_s est nul; ce serait l'instant de commutation si la capacité C n'existait pas.

A l'aide de 5.49 et 5.50, l'équation du circuit de la figure 5.6a s'écrit

$$C\dot{u} - pu^2 = qt \quad 5.51$$

équation différentielle non-linéaire et non autonome du premier ordre. En posant

$$T = t/t_r \quad \text{et} \quad U = u/u_r \quad 5.52$$

$$\text{avec} \quad t_r = \left(\frac{C^2}{pq}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad u_r = \left(\frac{qC}{p}\right)^{1/3} \quad 5.53$$

on obtient 5.51 sous la forme réduite

$$dU/dT = T + U^2 \quad 5.54$$

5.7.2 Solution graphique

Le réseau des isoclines de pente m , d'équation

$$T = m - U^2 \quad 5.55$$

permet de construire graphiquement les solutions de 5.54 représentées à la figure 5.7

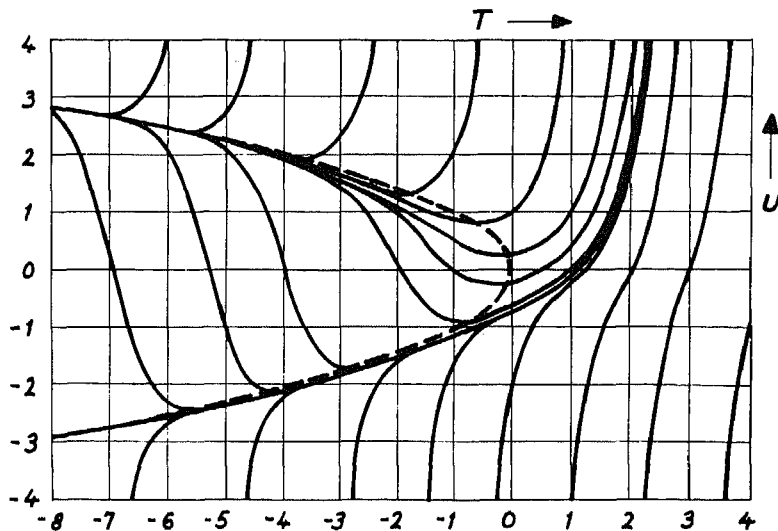


Fig. 5.7 Solutions de l'équation de commutation

La solution particulière correspondant au système non perturbé est celle qui tend vers la branche négative de la parabole $U = (-T)^{1/2}$ lorsque T tend vers moins l'infini.

5.7.3 Solution analytique

L'équation 5.54 est une équation de Riccati dont l'intégrale générale est [28]

$$U = -\frac{dz}{z dT} \quad 5.56$$

z étant l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$\frac{d^2 z}{dT^2} + zT = 0 \quad 5.57$$

En posant $T = (3x/2)^{2/3}$ 5.58

puis $z = x^{1/3} y$ 5.59

5.57 se ramène à l'équation de Bessel d'ordre $1/3$

$$x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + (x^2 - (1/3)^2) = 0 \quad 5.60$$

dont la solution a la forme [16, p.271]

$$y = P_1 J_{1/3}(x) + P_2 J_{-1/3}(x) \quad 5.61$$

où $J_{1/3}$, $J_{-1/3}$ sont les fonctions de Bessel de première espèce, et P_1 , P_2 des constantes.

En introduisant 5.58 et 5.59, la relation 5.61 devient

$$z = T^{1/2} (P_3 J_{1/3} + P_4 J_{-1/3}) \quad 5.62$$

avec comme argument des J_n

$$x = \frac{2}{3} T^{3/2} \quad 5.63$$

P_3 et P_4 sont de nouvelles constantes.

A l'aide des relations [16 p.271]

$$\frac{d}{dx}(J_n(x)) = J_{n-1}(x) - \frac{nJ_n(x)}{x}$$

et
$$J_n(x) = \frac{2(n+1)}{x} \cdot J_{n+1}(x) - J_{n+2}(x)$$

on peut calculer

$$dz/dT = T(P_3 J_{-2/3} - P_4 J_{2/3}) \quad 5.64$$

En introduisant 5.62 et 5.64 dans 5.56, on obtient

$$U = T^{1/2} \frac{J_{2/3}(x) - PJ_{-2/3}(x)}{J_{-1/3}(x) + PJ_{1/3}(x)} \quad 5.65$$

P étant la constante d'intégration.

Si $T < 0$, l'argument x est complexe

$$x = \frac{2}{3}T^{3/2} = -j\frac{2}{3}(-T)^{3/2} = -jx'$$

de même que les fonctions J_n elles-mêmes.

On peut alors introduire la fonction modifiée, réelle pour $T < 0$:

$$I_n(x') = (-j)^{-n} J_n(-jx') = j^{-n} J_n(jx') \quad 5.66$$

qui donne

$$U = (-T)^{1/2} \frac{I_{2/3}(x') - PI_{-2/3}(x')}{I_{-2/3}(x') - PI_{1/3}(x')} \quad 5.67$$

l'argument des I_n étant

$$x' = \frac{2}{3}(-T)^{3/2} \quad 5.68$$

La constante P est déterminée par les conditions initiales. Si le système n'est pas perturbé

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} U = -(-T)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{I_{2/3} - PI_{-2/3}}{I_{-1/3} - PI_{1/3}} = -1$$

La détermination analytique de cette limite est délicate, car les développements asymptotiques de I_n et I_{-n} sont presque identiques et on obtient une différence de grands nombres.

On a préféré procéder numériquement en calculant la valeur P_1 de P pour laquelle la fraction est égale à -1, et en étudiant l'évolution de P_1 lorsque l'argument x' tend vers l'infini. On obtient, à l'aide des tables de $I_n(x')$ [29,p.235]

x'	1	2	3
P_1	0,986	0,999	0,9999

P_1 tend vers 1 lorsque x' tend vers l'infini, donc $P = 1$ et 5.65 devient

$$U = T^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{J_{2/3}(x) - J_{-2/3}(x)}{J_{-1/3}(x) + J_{1/3}(x)} \quad 5.69$$

Le retard de commutation T_d est donné par le premier passage de U par l'infini, donc pour la plus petite valeur x_d de x satisfaisant l'équation

$$J_{-1/3}(x) + J_{1/3}(x) = 0$$

$$\text{d'où [29,p.142]} \quad x_d = 2,38$$

$$\text{et, à l'aide de 5.63} \quad T_d = 2,33 \quad 5.70$$

5.7.4 Retard de commutation du multivibrateur

Le modèle introduit précédemment est valable pour tous les systèmes astables dont la commutation est ralentie par l'effet prédominant d'une capacité. Les paramètres de commutation p et q doivent être déterminés pour chaque cas.

Dans le cas du multivibrateur de la figure 5.1, le début de la commutation de l'état T_1 bloqué à l'état T_1 saturé peut être étudié à l'aide du schéma de la figure 5.8, valable lorsque les hypothèses 1 à 4 du paragraphe 5.3.2 sont vérifiées.

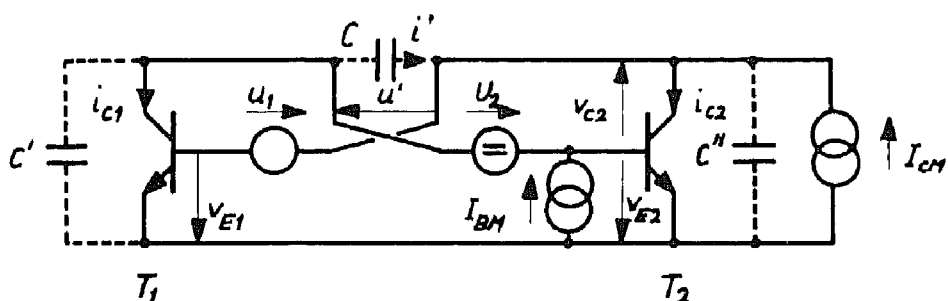


Fig. 5.8 Schéma équivalent du multivibrateur au début de la commutation

u_1 (variant lentement) et U_2 (supposée constante) sont les tensions respectives aux bornes de C_{L1} et C_{L2} .

Toutes les capacités parasites peuvent être concentrées en 3 capacités C , C' et C'' du même ordre de grandeur. Il est raisonnable d'admettre (les résultats expérimentaux le confirment) que l'effet de la capacité C , de collecteur à collecteur, prédomine. On déterminera donc la caractéristique $u'-i'$ aux bornes de C .

En admettant que $i' \ll I_{CM}$, on obtient, en introduisant les relations 5.24, 5.25 et 5.30 dans les équations du circuit de la figure 5.8

$$i' = I_{BM} - I_{CM} e^{(u_1 + U_2 + u')/V_B} - I_{C0} e^{-(u' + U_2)/V_B} \quad 5.71$$

dont le maximum en fonction de u' est

$$i'_{\max} = I_{BM} - 2(I_{C0} I_{CM})^{1/2} e^{u_1/2V_B} \quad 5.72$$

pour
$$-u' = U_2 + \frac{1}{2}(u_1 + V_B \ln \frac{I_{CM}}{I_{C0}}) \quad 5.73$$

L'état métastable est atteint lorsque $i'_{\max} = 0$. On peut vérifier qu'en annulant le premier membre de 5.72 et en reprenant les équations circuit de la figure 5.8, on retombe bien sur la relation 5.37.

Les paramètres de commutation p et q seront calculés à l'état métastable.

Paramètre p

Par définition

$$i = -pu^2 \quad 5.49$$

$$\text{où} \quad u = u' - u'(i' = i'_{\max}) \quad \text{et} \quad i = i' - i'_{\max} \quad 5.74$$

Les relations 5.71 et 5.72 donnent pour $i'_{\max} = 0$

$$i = I_{BM} - \frac{I_{BM}^2}{4I_{C0}} \cdot e^{(U_2 + u')/V_B} - I_{C0} \cdot e^{-(U_2 + u')/V_B} \quad 5.75$$

Sachant que $i = i'_{\max} = 0$ pour $u = 0$, on en tire, à l'aide de 5.74

$$i = I_{BM}(1 - \text{ch}(u/V_B)) \quad 5.76$$

Le développement en série [24]

$$\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad 5.77$$

donne pour $u \ll V_B$

$$i = -\frac{I_{BM}}{2V_B^2} \cdot u^2 \quad 5.78$$

D'où, en comparant avec 5.49

$$p = I_{BM}/2V_B^2 \quad 5.79$$

Paramètre q

D'après la figure 5.6 et la relation 5.50, on peut écrire

$$q = -\frac{di'_{\max}}{dt} = -\frac{di'_{\max}}{du_1} \cdot \frac{du_1}{dt} \quad 5.80$$

La relation 5.72 donne, pour $i'_{\max} = 0$

$$di'_{\max}/du_1 = -I_{BM}/2V_B \quad 5.81$$

D'autre part, au point métastable, la capacité C_{L1} est traversée par un courant $(u_R - V_1)/R_D$ qu'on peut admettre égal à I_{BM} , car les tensions V_1 et V_2 sont assez voisines. Donc

$$du_1/dt = I_{BM}/C_L \quad 5.82$$

En introduisant 5.81 et 5.82 dans 5.80 on obtient

$$q = \frac{I_{BM}^2}{2C_L V_B} \quad 5.83$$

A l'aide des résultats 5.79 et 5.83, les relations 5.53 donnant les échelles de temps et de tension du phénomène de commutation deviennent

$$t_r = \frac{V_B}{I_{BM}} (4C^2 C_L)^{1/3} \quad \text{et} \quad u_r = V_B (2C/C_L)^{1/3} \quad 5.84$$

Les relations 5.70 et 5.84 donnent alors le retard de commutation t_d (pour chaque commutation, donc deux fois par période du multivibrateur)

$$t_d = t_r \cdot T_d = 3,7 \frac{V_B}{I_{BM}} \cdot C^{2/3} C_L^{1/3} \quad 5.85$$

Remarque

En examinant la relation 5.73, on voit que la tension u' correspondant au maximum de i' est une fonction de u_1 . Donc la caractéristique de commutation se déplace aussi parallèlement à l'axe des tensions, contrairement au modèle utilisé. On peut montrer que cet effet est négligeable tant que

$$(C/C_L)^{1/3} \ll 1 \quad 5.86$$

ce qui est généralement le cas.

5.7.5 Temps de commutation

La caractéristique du dipôle aux bornes de la capacité parasite C perd son allure parabolique dès qu'on s'éloigne de son maximum. En fait, le courant que peut fournir le dipôle à la capacité est limité, donc la vitesse de commutation est aussi limitée.

Dès que u' dépasse de quelques dixièmes de volt le sommet de la caractéristique, donc avant que v_{CE1} n'ait baissé de façon significative, le transistor T_2 se bloque alors que T_1 tend à se saturer. Le système peut alors être ramené au schéma de la figure 5.9

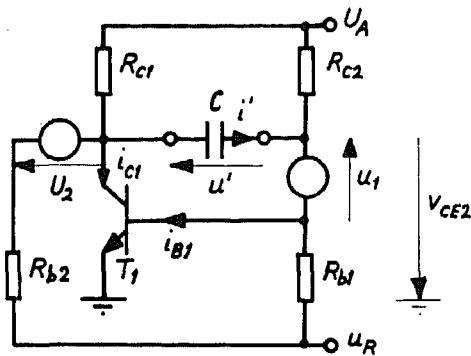


Fig. 5.9 Schéma équivalent après blocage de T_2

Comme la tension de collecteur v_{CE2} de T_2 ne remonte que très lentement (constante de temps τ_c), on peut admettre en première approximation que v_{CE2} est nul tant que T_1 n'est pas saturé.

Toujours en première approximation, on peut négliger les courants traversant R_{b1} et R_{b2} . Sachant que i_{B1} est bien inférieur à i_{C1} tant que T_1 n'est pas saturé, on obtient alors

$$-\frac{dv_{CE1}}{dt} = \frac{U_A}{R_C C} \quad 5.87$$

La commutation proprement dite (saturation de T_1) se produit donc en un temps approximatif

$$t_c \approx R_C C \quad 5.88$$

En résumé, le processus de commutation à partir de l'état T_1 bloqué se compose de trois phases successives:

- Un temps de retard t_d (relativement long) donné par 5.85 pendant lequel les états de tension du circuit ne changent que très peu.

- Un temps de commutation proprement dite t_c (relativement court) donné approximativement par 5.88, pendant lequel la tension de v_{CE1} passe de U_A à sa valeur de saturation.
- Une remontée exponentielle très lente de v_{CE2} avec la constante de temps τ_c donnée par 5.2.

5.8 Fluctuations statistiques de la période ("jitter")

5.8.1 Circuit équivalent

Le processus de commutation décrit précédemment est toujours perturbé par le bruit inhérent aux éléments du circuit, dont on peut tenir compte en complétant le circuit équivalent de la figure 5.6 par les deux sources de bruit i_n et u_n représentées à la figure 5.10.

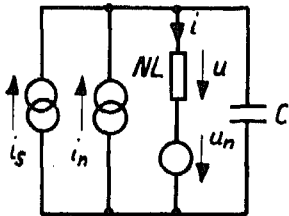


Fig. 5.10 Circuit équivalent avec sources de bruit

On admettra que l'effet des déplacements de la parabole de commutation parallèlement à l'axe des tensions est négligeable, comme lors du calcul du retard de commutation. On peut alors supprimer la source u_n ; il ne reste que la source de bruit i_n qu'on supposera stationnaire dans l'intervalle de temps où elle perturbe le circuit.

L'équation du circuit est alors

$$Cu - pu^2 = qt + i_n \quad 5.89$$

5.8.2 Ecart-type des fluctuations

On peut écrire 5.89 sous la forme réduite

$$dU/dT = T + U^2 + I_n \quad 5.90$$

$$\text{où} \quad I_n = i_n/i_r \quad \text{et} \quad i_r = (q^2 C^2/p)^{1/3} \quad 5.91$$

U et T sont donnés par les équations 5.52 et 5.53.

Le système perturbé par le bruit commute au même instant qu'un système équivalent non perturbé mais décalé dans le temps, décrit par l'équation

$$dU'/dT - U'^2 = T + \delta T \quad 5.92$$

Si la perturbation est faible, on peut admettre que l'écart-type de δT est proportionnel à la valeur efficace de I_n

$$\sigma_{\delta T} = \kappa_1 (\overline{I_n^2})^{1/2} \quad 5.93$$

où κ_1 est une constante

En revenant aux grandeurs non normalisées:

$$\sigma_{\delta t}/t_r = \kappa_1 (\overline{i_n^2})^{1/2}/i_r$$

$$\text{d'où} \quad \sigma_{\delta t} = (\overline{i_n^2})^{1/2} \kappa_1 / q \quad 5.94$$

$(\overline{i_n^2})^{1/2}$ est la valeur efficace du bruit dans la bande de fréquence f_{\min} à f_{\max} . La fréquence f_{\min} dépend du temps de mesure; f_{\max} est la fréquence maximum d'un signal capable de perturber la commutation, nécessairement proportionnelle à l'inverse du temps caractéristique

$$f_{\max} = \kappa_2 / t_r \quad 5.95$$

On supposera dans la suite que $f_{\max} \gg f_{\min}$.

Cas du bruit blanc

La densité spectrale S_0 de i_n est constante dans le domaine de fréquences considéré

$$d(\overline{i_n^2}) = S_0 df$$

En intégrant de f_{\min} à f_{\max} , on obtient à l'aide des relations 5.53, 5.94 et 5.95

$$\sigma_{\delta t} = \kappa_3 S_0^{1/2} q^{-5/6} p^{1/6} C^{-1/3} \quad 5.96$$

où κ_3 est une nouvelle constante.

Cas du bruit $1/f$ (bruit de scintillement)

La densité spectrale $S_0 f_0 / f$ est inversement proportionnelle à la fréquence dans le domaine de fréquences considéré. On obtient alors

$$\sigma_{\delta t} = \kappa_1 \left(\ln \frac{\kappa_2 p^{1/3} q^{1/3}}{C^{2/3} f_{\min}} \right)^{1/2} \cdot (S_0 f_0)^{1/2} / q \quad 5.97$$

5.8.3 Application au multivibrateur

On peut distinguer deux contributions aux fluctuations statistiques de la période du multivibrateur:

a) Les fluctuations de la tension aux bornes de C_{L1} (C_{L2}) au début de chaque demi-période de blocage de T_1 (T_2). Cette contribution peut être négligée, car elle fait intervenir le bruit dans une bande de fréquence très étroite comprise très approximativement entre $2/T$ et $1/\tau_c$

b) Les fluctuations δt de l'instant de commutation pour une charge initiale des capacités donnée, étudiées précédemment. Comme chaque période comprend deux commutations dont les fluctuations ne sont pas corrélées, on aura

$$\sigma_T^2 = 2\sigma_{\delta t}^2 \quad 5.98$$

On a vu que les paramètres affectant $\sigma_{\delta t}$ sont p , q et C , déjà déterminés pour le multivibrateur, et le spectre de la source de bruit i_n .

Pour déterminer ce spectre, on utilisera le schéma équivalent du transistor représenté à la figure 5.11, valable tant que le transistor n'est pas bloqué.

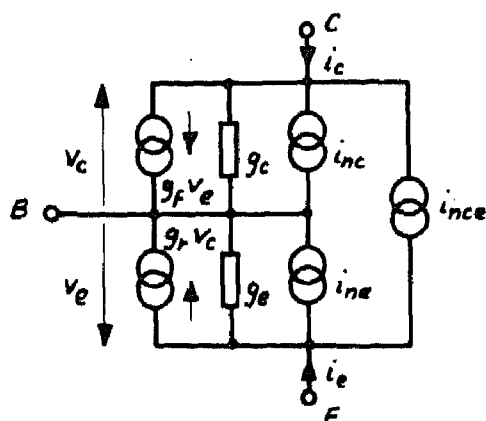


Fig. 5.11 Schéma équivalent du transistor avec sources de bruit

Il s'agit du schéma correspondant aux équations de Ebers-Moll linéarisées 5.13 et 5.14, auquel on a ajouté une source de bruit pour chaque groupe de porteurs circulant dans le transistor [30]. Lorsque le transistor n'est pas saturé, les conductances g_c et g_r sont nulles.

Les sources de bruit sont définies comme suit:

Source i_{nce} : somme des bruits de grenaille dûs aux porteurs injectés à l'émetteur et collectés au collecteur d'une part, et aux porteurs injectés au collecteur et collectés à l'émetteur d'autre part. La densité spectrale du bruit de grenaille (bruit blanc) associé à un courant i à travers une jonction vaut [30]

$$S_g = 2ei \quad 5.99$$

Les deux courants causes de i_{nce} sont

$$\alpha_F I_{ES} e^{v_E/V_B} \quad \text{et} \quad \alpha_R I_{CS} e^{v_C/V_B}$$

On obtient la densité spectrale de i_{nce} à l'aide des relations 5.15, 5.16 et 5.99, sachant que les deux contributions ne sont pas corrélées:

$$S_{ce} = 2k\theta(\alpha_F g_e + \alpha_R g_c) \quad 5.100$$

Source i_{ne} : bruit créé par les porteurs injectés à l'émetteur et recombinaisonnés avant d'avoir atteint le collecteur. Il est composé d'un bruit de grenaille proportionnel au courant

$$(1-\alpha_F)I_{ES}e^{V_E/V_B} = (1-\alpha_F)g_e V_B$$

et d'un bruit de scintillement dû aux recombinaisons en surface, de densité spectrale S_{se} . La densité spectrale de i_{ne} est alors

$$S_e(f) = 2k\theta(1-\alpha_F)g_e + S_{se}(f) \quad 5.101$$

Source i_{nc} : bruit créé par les porteurs injectés au collecteur et recombinaisonnés avant d'avoir atteint l'émetteur. Son spectre est calculé de façon parallèle à celui de i_{ne} , donc

$$S_c(f) = 2k\theta(1-\alpha_R)g_c + S_{sc}(f) \quad 5.102$$

Cette source de bruit n'existe que si le transistor est saturé.

On néglige la résistance r_{bb} , entre base externe et base interne, ainsi que le bruit qui lui est associé; cette simplification est parfaitement justifiée si le transistor travaille à très faible niveau de courant.

Pour calculer la source de bruit i_n , on peut négliger les capacités de liaison, ainsi que les résistances R_c et R_b , dont on ne conserve que le bruit; i_n est alors le courant de court-circuit entre les collecteurs C_1 et C_2 lorsque le multivibrateur est à l'état métastable. Le circuit se ramène alors au schéma équivalent alternatif représenté à la figure 5.12

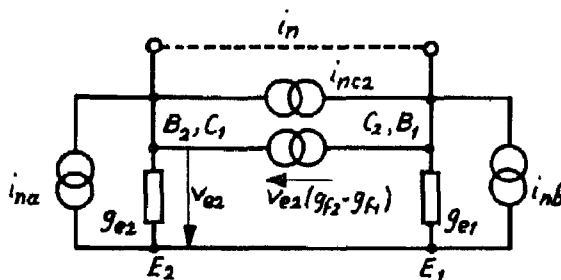


Fig. 5.12 Schéma équivalent pour le calcul du bruit en court-circuit i_n

Comme précédemment, l'indice 1 se rapporte au transistor quittant l'état bloqué et l'indice 2 au transistor quittant l'état saturé.

La source i_{na} représente la superposition des sources non corrélées i_{ne2} , i_{nce1} et des sources de bruit associées aux résistances R_{c1} et R_{b2} , alors que i_{nb} correspond à la superposition de i_{ne1} , i_{nce2} et du bruit de R_{c2} et R_{b1} .

En superposant les effets des trois sources i_{na} , i_{nb} et i_{nc2} , on obtient

$$\overline{i_n^2} = \overline{i_{nc2}^2} + \left(\frac{g_{e1} - g_{f1} + g_{f2}}{g_{e1} + g_{e2}} \right)^2 \overline{i_{na}^2} + \left(\frac{g_{e2} - g_{f2} + g_{f1}}{g_{e1} + g_{e2}} \right)^2 \overline{i_{nb}^2} \quad 5.103$$

En tirant g_{e1} et g_{f1} de 5.28, g_{e2} et g_{f2} de 5.19, en abandonnant les termes négligeables en vertu des conditions 5.23, et sachant qu'à l'état métastable $i_{c1} = i_{b2} = I_{BM}/2$ et $i_{c2} = I_{CM}$, on obtient

$$\overline{i_n^2} = \overline{i_{nc2}^2} + \overline{i_{na}^2} + (I_{BM}/2I_{CM})^2 \overline{i_{nb}^2} \quad 5.104$$

ou, pour les densités spectrales correspondantes:

$$S = S_{c2} + S_a + (I_{BM}/2I_{CM})^2 S_b \quad 5.105$$

Cas du spectre blanc

Si le bruit de scintillement est négligeable, il ne reste que les contributions de deux bruits blancs: le bruit de grenaille associé aux jonctions des transistors, et le bruit thermique des résistances. La densité spectrale du courant carré moyen de bruit thermique associé à une résistance R est

$$S_{th} = 4k\theta/R \quad 5.106$$

A l'état métastable, les conductances d'émetteur g_e des deux transistors sont bien supérieures à $1/R_c$ et $1/R_b$; le bruit de ces résistances est donc négligeable vis-à-vis de i_{nce} et

$$S_a = S_{e2} + S_{ce1} \quad \text{et} \quad S_b = S_{e1} + S_{ce2} \quad 5.107$$

On peut alors introduire les relations 5.107, 5.100, 5.101, 5.102, 5.19, 5.20 et 5.28 dans l'équation 5.105. En abandonnant les termes négligeables en vertu de la condition 5.23, il ne reste que deux contributions égales de S_{c2} et S_{cel} qui donnent

$$S = S_0 = 2eI_{BM} \quad 5.108$$

En introduisant les résultats 5.79, 5.83 et 5.108 dans la relation 5.96, on obtient

$$\sigma_{\delta t} = 2,25\kappa_3(k\theta)^{1/2}I_{BM}^{-1}C_L^{5/6}C^{-1/3} \quad 5.109$$

La figure 5.3 représentant la caractéristique de réglage montre qu'on peut écrire en première approximation

$$T \sim R_b C_L U_A / u_R \quad 5.110$$

En utilisant la définition 5.32 de I_{BM} , on obtient alors

$$\sigma_T/T \approx \kappa_4 \theta^{1/2} \cdot C^{-1/3} \cdot C_L^{-1/6} \cdot \frac{u_R}{(u_R - V_2)U_A} \quad 5.111$$

où κ_4 est une nouvelle constante

Cas du spectre en $1/f$

La situation est passablement plus compliquée si c'est le bruit de scintillement des résistances et des transistors qui prédomine. On peut admettre la proportionnalité suivante pour la densité spectrale S_s du courant carré moyen de bruit de scintillement associé à un courant i [31]:

$$S_s \sim i^2/f \quad 5.112$$

Si le facteur de proportionnalité reste du même ordre de grandeur pour les trois sources de bruit de scintillement des transistors ainsi que pour les quatre résistances, on obtient pour l'état métastable, à l'aide de 5.105 et en abandonnant les sources de bruit rendues négligeables par la condition 5.23

$$S(f) = S_{sc2} + S_{R_b2} + (I_{BM}/2I_{CM})^2 S_{R_{c2}}$$

avec S_{sc2} et $S_{R_{c2}}$ proportionnels à I_{BM}^2/f et $S_{R_{c2}}$ proportionnel à I_{CM}^2/f , donc

$$S(f) = S_0 f_0 / f \sim I_{BM}^2 / f \quad 5.113$$

La racine carrée du logarithme dans la relation 5.97 variant très lentement, on obtient en première approximation

$$\sigma_{\delta t} \sim I_{BM} / q \quad 5.114$$

d'où, à l'aide de 5.32, 5.83 et 5.110

$$\sigma_T / T \sim \frac{u_R}{(u_R - V_2) U_A} \quad 5.115$$

pratiquement indépendant de C et de C_L .

6. MESURE DU MULTIVIBRATEUR

6.1 Circuit mesuré

On mesurera les caractéristiques du circuit de la figure 5.1 avec, comme valeurs nominales

$$R_{c1} = R_{c2} = 1,5 \text{ M}\Omega \pm 5\%$$

$$R_{b1} = R_{b2} = 10 \text{ M}\Omega \pm 5\%$$

$$C_{L1} = C_{L2} = 33 \text{ nF} \pm 5\%$$

$$U_A = 1,3 \text{ V} \quad \theta = 20^\circ \text{C}$$

Les résistances sont à couche de carbone; les 2 transistors sont des échantillons expérimentaux du type planar, au Silicium, fabriqués par le Centre Electronique Horloger S.A., dont les gains sont représentés à la figure 6.1

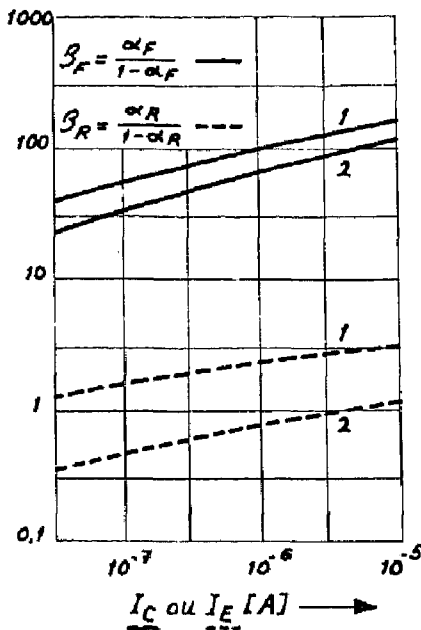


Fig. 6.1 Gains des transistors utilisés

Les courants inverses des quatre jonctions, mesurés à 20°C et 1,5V, sont tous inférieurs à 10pA, donc négligeables. Les capacités des jonctions à tension et courant nuls sont de l'ordre de 3pF.

6.2 Etat métastable et tensions V_1, V_2, V_3

Ces mesures sont effectuées pour $u_R = U_A$, et en remplaçant les capacités de liaison C_L par les sources de tensions u_1 et u_2 représentées à la figure 6.2

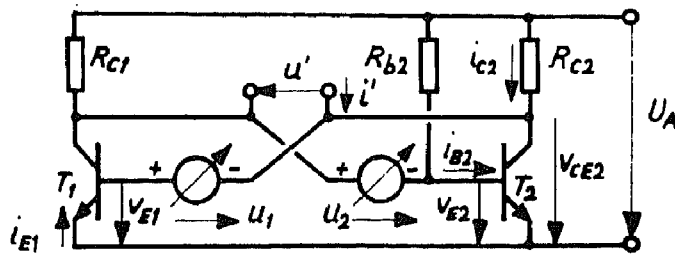


Fig. 6.2 Circuit de mesure de l'état métastable et de la caractéristique de commutation

On ajuste u_2 de façon à annuler le courant dans R_{C1} pour T_1 bloqué. On peut alors mesurer le courant traversant R_{C2} (approximativement égal à I_{CM}) le courant I_{BM} traversant R_{B2} , les tensions v_{E2sat} et v_{CE2sat} .

On augmente ensuite u_1 jusqu'à ce que le circuit bascule. Juste à la limite, on mesure $i_{Elméta}$, $v_{Elméta}$ et $v_{CE2méta}$. On calcule ensuite, selon les relations 5.40 à 5.42

$$V_1 = v_{Elméta} + v_{CE2sat} - v_{CE2méta}, \quad V_2 = v_{E2sat}, \quad V_3 = v_{CE2sat} + V_B/2$$

Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 6.1.

	$T_1 = \#1$ $T_2 = \#2$	$T_1 = \#2$ $T_2 = \#1$	
I_{BM}	86	87	nA
I_{CM}	815	860	nA
v_{E2sat}	460	460	mV
v_{CE2sat}	100	62	mV
$i_{Elméta}$	-33	-40	nA
$v_{Elméta}$	370	380	mV
$v_{CE2méta}$	118	80	mV
V_1	352	362	mV
V_2	460	460	mV
V_3	113	75	mV

Tableau 6.1

On mesure donc aux points métastables

$$i_{C1}/I_{BM} \approx -i_{E1}/I_{BM} = 0,38 \text{ et } 0,46$$

La valeur théorique de 0,5 donnée par la relation 5.37 est suffisamment proche des valeurs mesurées pour que les résultats qui en découlent soient valables.

En moyenne, pour les transistors mesurés, et à 20°C:

$$V_1 = 357 \text{ mV}, \quad V_2 = 460 \text{ mV}$$

$$V_3 = 94 \text{ mV} \text{ donc } V_2 + V_3 = 554 \text{ mV.}$$

Ces valeurs correspondent aux valeurs choisies pour établir les caractéristiques théoriques de réglage et de température.

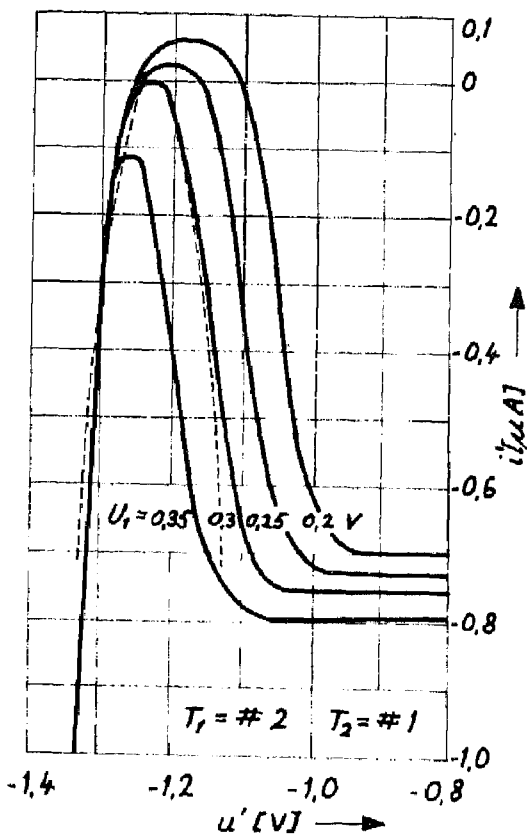
6.3 Caractéristique de réglage

Les points mesurés sont reportés sur la figure 5.3 représentant la caractéristique théorique. La correspondance est bonne, sauf pour u_R inférieur à $0,6 U_A$; dans cette région, la condition 5.5 n'est plus vérifiée et la courbe théorique n'est plus valable.

6.4 Influence de la température

On a mesuré $f(u_R)$ en changeant la température des transistors de $\theta = 9^\circ\text{C}$ à $\theta = 33,5^\circ\text{C}$, le reste du circuit restant à température constante. Le coefficient de température ainsi obtenu est reporté sur la figure 5.4. La correspondance avec la courbe calculée est bonne tant que u_R n'est pas trop faible.

6.5 Caractéristique de commutation



Cette mesure est effectuée à l'aide du circuit de la figure 6.2, en branchant une source de tension u' entre les collecteurs, et en mesurant le courant i' fourni par cette source. La caractéristique obtenue pour plusieurs valeurs de u_1 encadrant l'état métastable (pour lequel $i'_{\max} = 0$) est représentée à la figure 6.3, sur laquelle est également représentée en trait interrompu la parabole théorique de commutation calculée à l'aide des relations 5.49, 5.74 et 5.79.

Fig.6.3 Caractéristique de commutation

6.6 Temps de retard et temps de commutation

On vérifie la relation 5.85 donnant le retard de commutation t_d en mesurant l'augmentation de période ΔT lors du branchement d'une capacité extérieure C_{ext} entre les deux collecteurs. Si cette capacité est suffisamment grande par rapport aux capacités déjà présentes, l'augmentation de période doit être égale au double de t_d calculé pour $C=C_{ext}$. L'ensemble de mesure utilisé est représenté à la figure 6.4. La capacité C_i à l'entrée de l'amplificateur est inférieure au dixième de C_{ext} jusqu'à un minimum de 2,2pF. Le temps de montée de l'amplificateur est inférieur à 1µs. La dernière décade du compteur utilisé en périodemètre donne les microsecondes.

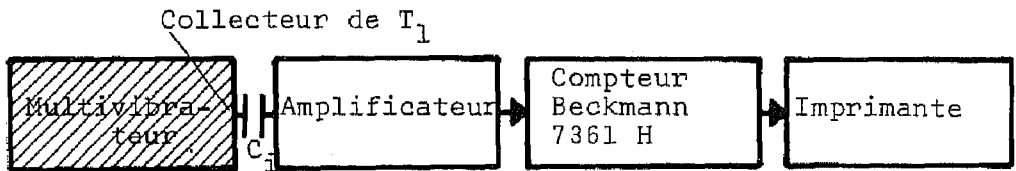


Fig. 6.4 Ensemble utilisé pour mesurer t_d , et les fluctuations de période

Les points mesurés sont représentés par des cercles à la figure 6.5. Ils correspondent assez bien à la courbe théorique calculée à l'aide de la relation 5.85 et tracée en trait interrompu sur la même figure.

L'enclenchement de capacités entre le collecteur et l'émetteur de chacun des transistors donne les résultats représentés par des croix. On voit que l'augmentation de période suit une loi semblable mais que l'effet est 2 à 3 fois plus faible. Ceci confirme la prédominance de l'effet de C sur celui des capacités C' et C'' définies à la figure 5.8.

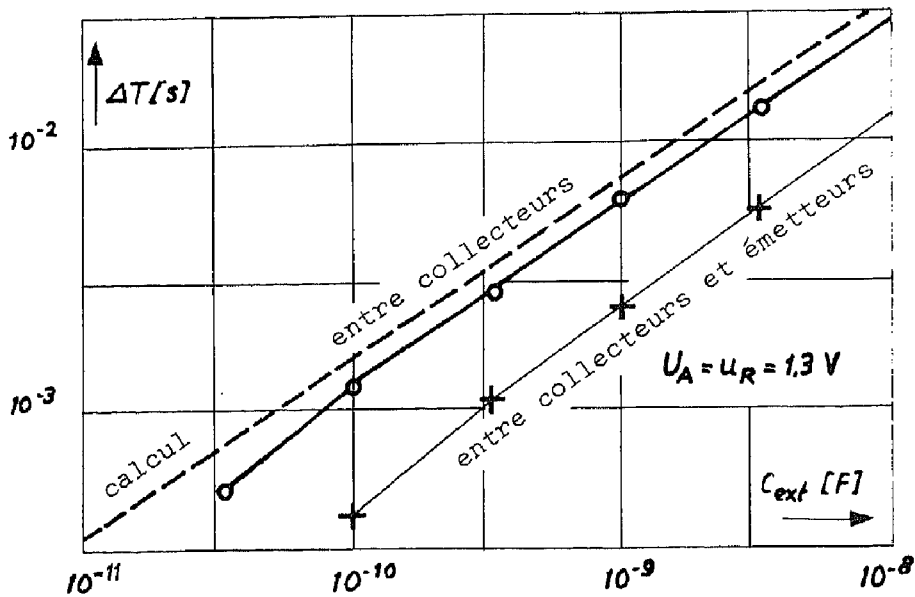


Fig.6.5 Augmentation de la période due à une capacité extérieure.

La relation entre ΔT et les capacités de liaison C_L est représentée à la figure 6.6. Les points mesurés en branchant une capacité C_{ext} de 1 nF entre collecteurs correspondent bien à la courbe théorique calculée par la relation 5.85.

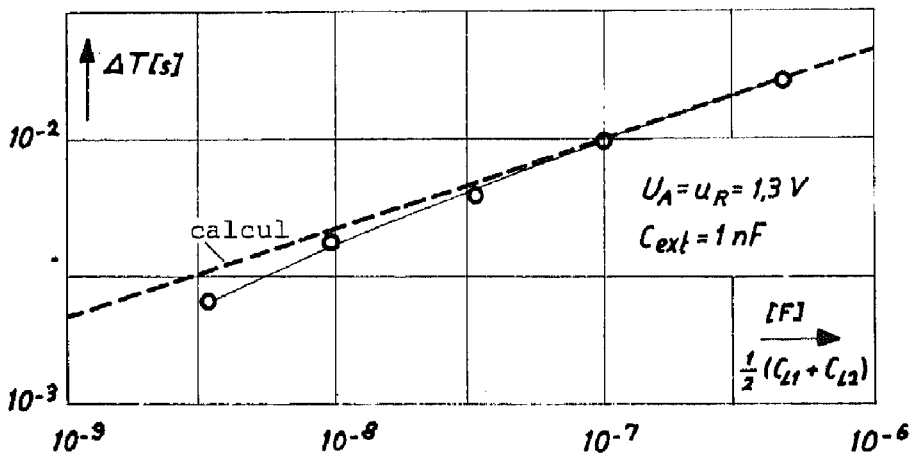


Fig.6.6 Influence de C_L sur l'augmentation de période lors de l'enclenchement de C_{ext} entre collecteurs.

Le temps de commutation du collecteur de T_1 (10% à 90%), mesuré en remplaçant le compteur par un oscilloscope, est représenté par des cercles à la figure 6.7.

Pour vérifier le peu d'influence des deux autres capacités C' et C'' , on a répété les mêmes mesures après avoir augmenté de 100pF les capacités collecteur-émetteur (croix).

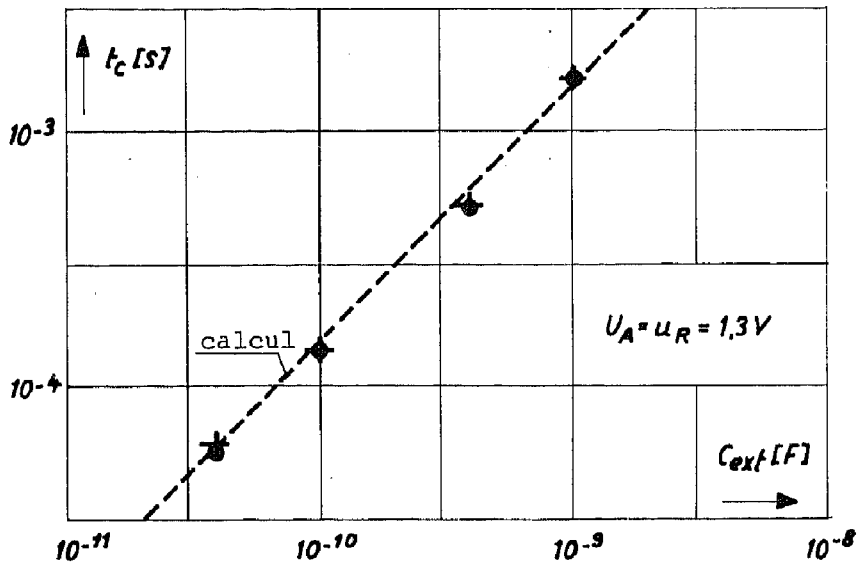


Fig. 6.7 Temps de commutation

Les deux groupes de mesures correspondent de très près à la relation théorique approximative 5.88 représentée en trait interrompu sur la même figure.

6.7 Fluctuations de la période

L'écart-type des fluctuations de période (jitter) σ_T est mesuré dans différentes conditions à l'aide de l'ensemble de la figure 6.4.

Pour chaque cas, on enregistre une période sur deux pendant 200 périodes, obtenant ainsi une centaine d'échantillons. Afin d'éliminer l'effet de la dérive thermique, on la rend linéaire en enfermant le circuit dans une enceinte à constante de temps thermique bien supérieure à la durée de la mesure, et on forme une suite ΔT_n en soustrayant chaque échantillon du précédent. La dérive thermique ne se manifeste plus alors que par un décentrage de la répartition sta-

tistique des éléments de cette nouvelle suite, dont on peut calculer l'écart-type $\sigma_{\Delta T}$. On montre dans l'appendice 2 que si les écarts de période ne sont pas corrélés, l'écart-type recherché σ_T est simplement donné par la relation

$$\sigma_T = \sigma_{\Delta T} / 2^{\frac{1}{2}}$$

6.7.1 Influence de la tension d'alimentation

Les résultats obtenus pour plusieurs valeurs de $u_R = U_A$ et les valeurs nominales données sous 6.1 sont reportés à la figure 6.8

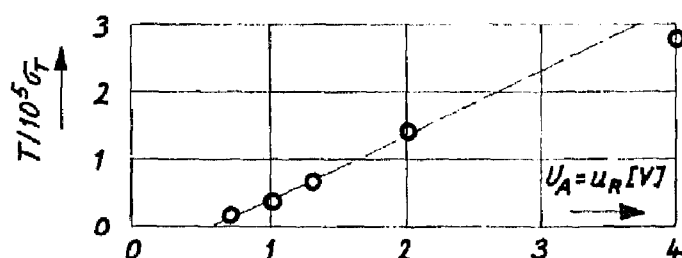


Fig. 6.8 Influence de la tension d'alimentation

On obtient une relation linéaire entre T/σ_T et $u_R = U_A$ qui correspond très bien aux relations 5.111 et 5.115. L'écart du point mesuré à 4V peut être attribué à la mauvaise précision de la mesure ($\sigma_{\Delta T} = 2,28\mu s$ est comparable à la quantification de 1 μs opérée par le compteur)

6.7.2 Influence de la capacité parasite

Cette mesure est effectuée en plaçant une capacité extérieure C_{ext} entre les deux collecteurs. Les résultats reportés à la figure 6.9 montrent que le jitter est à peu près constant pour C_{ext} variant de 1pF à 1nF. En examinant les relations 5.111 et 5.115, on peut en déduire que le bruit de scintillement prédomine.

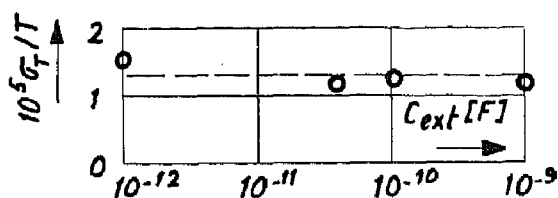
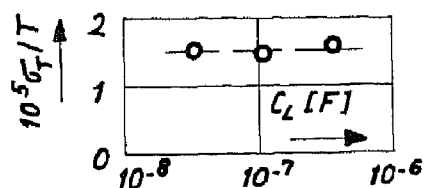


Fig. 6.9 Influence d'une capacité extérieure entre collecteurs

6.7.3 Influence des capacités de relaxation

Le résultat de cette mesure effectuée pour trois valeurs de C_L , les autres grandeurs conservant leurs valeurs nominales, est reporté sur la figure 6.10.



On constate que C_L n'a pratiquement aucune influence sur l'écart-type relatif, ce qui confirme la prédominance du bruit de scintillement

Fig. 6.10 Influence de la capacité C_L

6.7.4 Influence du niveau de courant

En variant R_c , tout en maintenant R_b/R_c et $R_b C_L$ à peu près constants, on obtient les résultats de la figure 6.11,

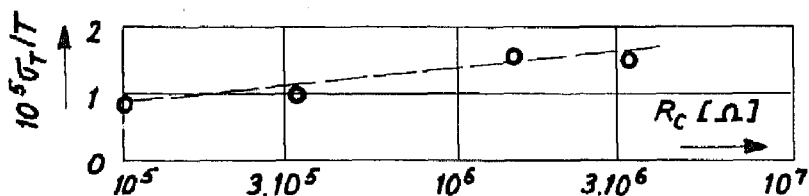


Fig. 6.11 Influence du niveau de courant

soit une légère augmentation du jitter lorsque le niveau de courant baisse. On peut l'expliquer partiellement par le fait que le bruit des résistances à couches de carbone a tendance à croître avec la valeur des résistances; d'autre part, la relation 5.112 utilisée pour calculer le résultat 5.115 est certainement très approximative.

7. REALISATION ET MESURE D'UN CIRCUIT DIVISEUR

7.1 Circuit réalisé

Le schéma d'une réalisation pratique d'un diviseur par asservissement de phase à faible consommation de puissance est représenté à la figure 7.1.

Le multivibrateur constitué par les transistors T_5 et T_6 joue le rôle d'oscillateur local. Le signal de sortie est recueilli au collecteur de T_6 à travers l'étage séparateur T_7 .

Le flanc négatif raide apparaissant au collecteur de T_5 est utilisé pour saturer pendant un court instant le MOST T_4 et former l'impulsion d'échantillonnage, qui est encore amplifiée par T_3 avant de commander la fermeture de l'interrupteur d'échantillonnage constitué par le MOST T_2 . Cet interrupteur branche le signal sinusoïdal d'entrée sur le réseau C-C'-R', à travers la résistance R formée de R_s et de la résistance interne de l'interrupteur R_{int} en série. La tension u_C aux bornes de C agit sur la fréquence du multivibrateur à travers l'étage amplificateur T_1 .

Les éléments actifs sont des échantillons expérimentaux du type planar, au silicium, fabriqués par le Centre Electronique Horloger S.A. Les transistors bipolaires sont identiques à ceux qui ont été utilisés pour réaliser le multivibrateur décrit au chapitre 6. Les transistors à effet de champ et électrode de commande isolée (MOST), à canal p, travaillent en mode d'enrichissement avec un seuil de l'ordre de grandeur de 0,7V. La diode est constituée par les deux jonctions d'un transistor en parallèle. Les résistances sont à couche de carbone et les condensateurs à film de polyester.

Le circuit est dimensionné de façon à fournir un signal de sortie de 5Hz environ avec une fréquence d'entrée maximale d'une dizaine de kilohertz.

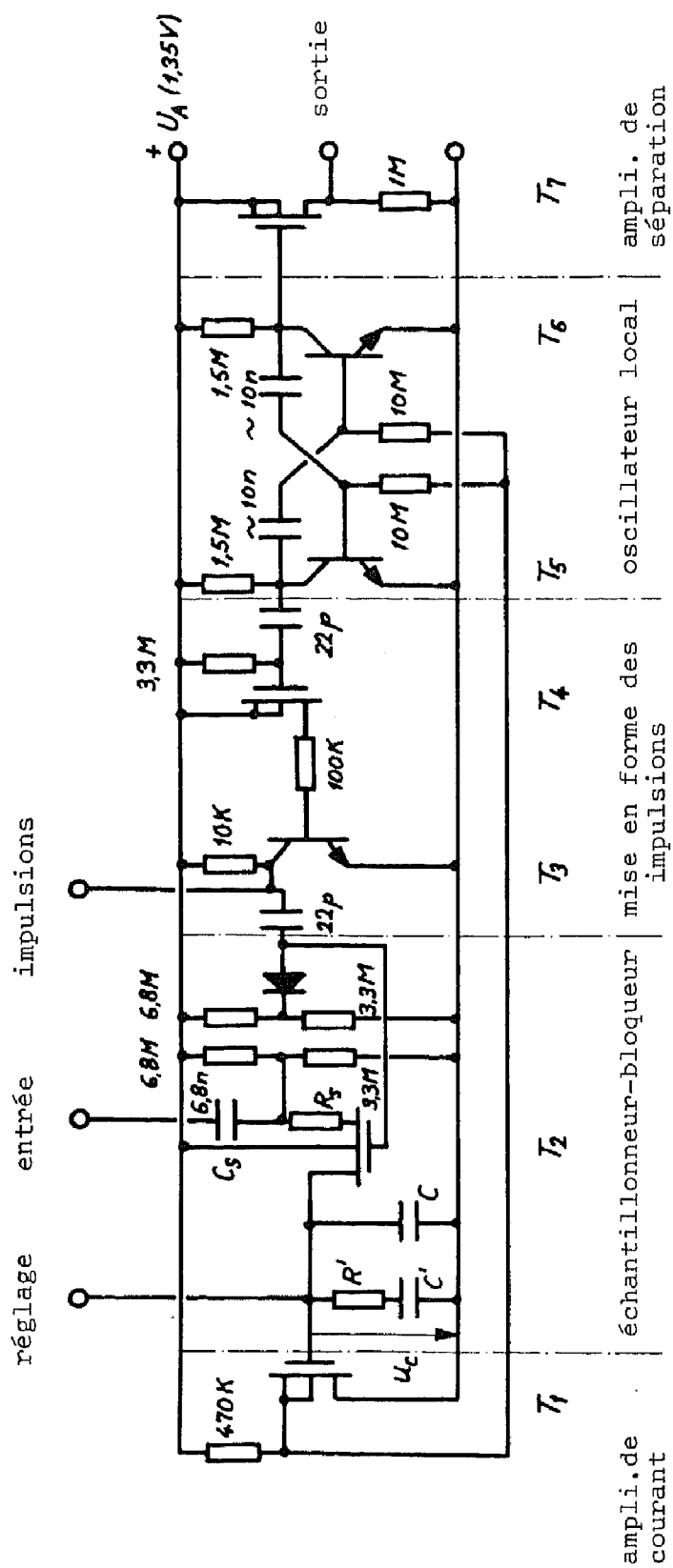


Fig. 7.1 Réalisation pratique d'un diviseur de fréquence par asservissement de phase

La réalisation a été effectuée sur circuit imprimé en évitant les couplages directs entre le signal d'entrée et le multivibrateur qui pourraient provoquer une synchronisation par injection nuisant à la stabilité du système. L'ensemble, alimenté de façon autonome par une cellule au mercure, consomme 4,3uA sous 1,35V, soit 5,8uW.

Pour réduire l'influence de la température sur la fréquence d'oscillation du multivibrateur, on peut compenser la diminution des tensions bases-émetteurs de T_5 et T_6 par une diminution parallèle de la tension de réglage; il faut pour cela que le coefficient de température de la tension "gate"-source $|v_{GS}|$ du MOST T_1 , à courant de drain constant, soit négatif. Pour cette raison, T_1 est un élément à canal large travaillant à faible densité de courant; l'influence de l'ionisation des états de surface l'emporte alors sur celle de la variation de mobilité, et le coefficient de température est négatif de quelques mV/°C.

Le signal d'entrée est superposé à une tension de polarisation U_{CO} avant d'être échantillonné, selon le schéma équivalent de la figure 7.2.

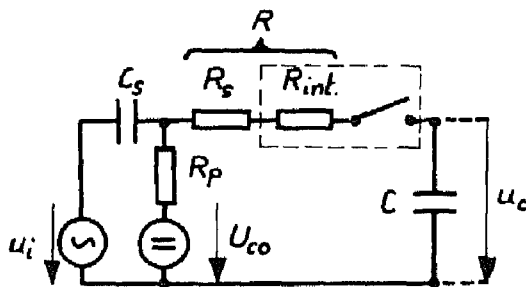


Fig. 7.2 Echantillonneur et polarisation

Pour que ce signal d'entrée ne soit pas affaibli par la capacité de couplage C_s , il faut que

$$\omega_i R_p C_s \gg 1 \quad 7.1$$

D'autre part, C_s doit avoir le temps de se recharger entre les échantillonnages, donc

$$R_p C_s \ll T \quad 7.2$$

et la tension à ses bornes ne doit varier que très peu au cours d'un échantillonnage:

$$RC_s \gg T_e$$

7.3

Avec une durée d'échantillonnage de 60µs environ, la valeur de 6,8nF choisie pour C_s satisfait ces trois conditions tant que R est supérieur à quelques dizaines de milliers d'ohms et f_i supérieure à quelques dizaines de hertz.

L'interrupteur proprement dit est constitué par un MOST symétrique de petites dimensions dont le substrat est relié au potentiel le plus positif, donc $+U_A$. Son électrode de commande est polarisée à une tension à peu près égale à U_{C0} , à laquelle on superpose une impulsion négative pendant les temps d'échantillonnage.

Les valeurs de R_s , C , R' , C' et f_i (ou N) seront indiquées pour chaque mesure où elles interviennent.

La résistance interne du générateur de signal d'entrée est négligeable (quelques centaines d'ohms).

7.2 Caractéristique de réglage

La caractéristique de réglage de fréquence, mesurée pour $U_A = 1,35V$ et 3 températures différentes, est représentée à la figure 7.3.

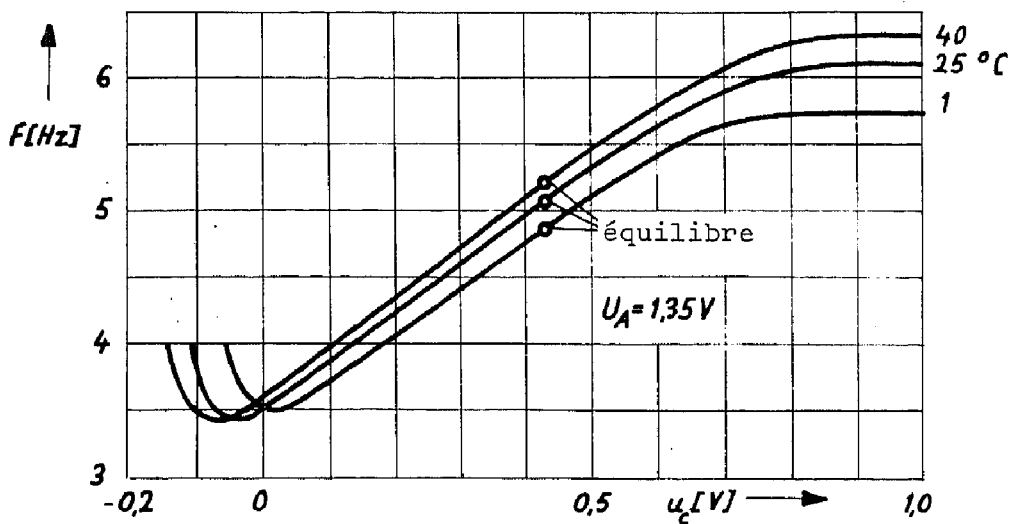


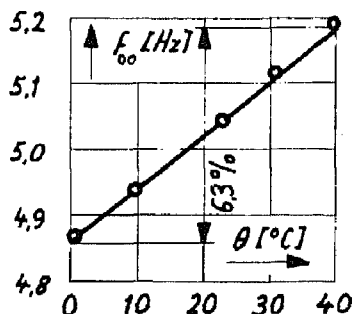
Fig.7.3 Caractéristique de réglage

On constate qu'elle est pratiquement linéaire autour du point d'équilibre mesuré en mettant l'entrée à la masse ($U_i=0$). Sa pente correspond au facteur de réglage k qui dépend très peu de la température. Autour du point d'équilibre, on mesure pour $\theta = 25^\circ\text{C}$

$$k = 22,7\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$$

7.3 Influence de la température sur la fréquence libre

La variation avec la température de la fréquence du système libre $f_{00}=\omega_{00}/2\pi$, mesurée pour $U_A = 1,35\text{V}$ et $U_i = 0$ est représentée à la figure 7.4.



On constate une augmentation de fréquence pratiquement linéaire de 6,3% entre 0 et 40°C , ce qui correspond à un coefficient

$$S_{\omega}^{\theta} = \frac{1}{\omega_{00}} \cdot \frac{d\omega_{00}}{d\theta} = 1,6 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C}$$

Fig.7.4 Influence de la température sur la fréquence libre

7.4 Influence de la tension d'alimentation sur la fréquence libre

La variation de f_{00} avec U_A , mesurée à 25°C pour $U_i = 0$, est représentée à la figure 7.5.

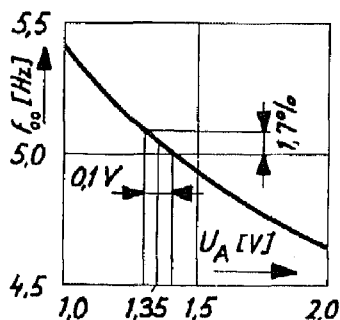


Fig. 7.5 Influence de la tension d'alimentation sur la fréquence libre

La tension d'une cellule au mercure varie très peu; on peut compter avec une variation maximum de 100mV qui correspond à une variation de fréquence de 1,7%.

7.5 Constante de temps τ

La constante de temps τ mesurée en fonction de R_s en enregistrant le retour exponentiel de la fréquence vers sa valeur d'équilibre après un écart de u_C pour

$$U_A = 1,35V \quad U_i = 0 \quad C = 100nF \quad C' = 0 \quad \theta = 25^\circ C$$

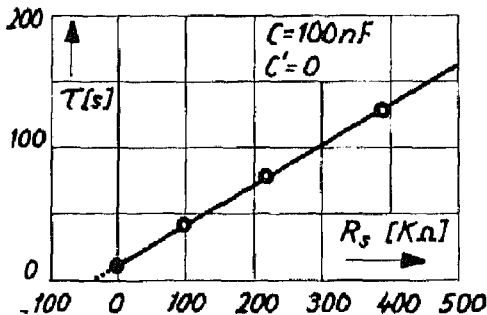


Fig. 7.6 Constante de temps τ

est représentée à la figure 7.6.

On en tire la résistance de passage de l'interrupteur

$$R_{int} = - R_s (\tau = 0) = 35K\Omega$$

et la durée effective d'échantillonnage, en appliquant la relation 2.45

$$T_e = 65\mu s$$

Cette dernière valeur correspond bien à la durée de l'impulsion mesurée à l'oscilloscope.

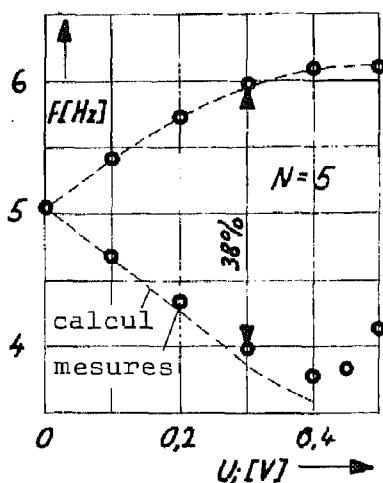
7.6 Domaine d'entraînement

On mesure le domaine d'entraînement en variant la fréquence d'entrée jusqu'à ce que le diviseur décroche. La relation 3.10 indique que cette variation doit être suffisamment lente pour que

$$\omega_i / \omega_i \ll 1/\tau_r$$

Les valeurs de f à la limite de décrochage, mesurées en fonction de l'amplitude d'entrée U_i avec

$$\begin{aligned} U_A &= 1,35V & \theta &= 25^\circ C \\ R_S &= 0 \text{ (} R=35K\Omega \text{)} & R' &= 15M\Omega \\ C=C' &= 4,7nF & N &= 5 \end{aligned}$$



sont reportées à la figure 7.7

Fig.7.7 Domaine d'entraînement

On a choisi un rapport de division faible pour éliminer l'effet du bruit et rendre U_i' égal à U_i , selon la relation 1.6.

Ces mesures correspondent bien avec les limites du domaine d'entraînement calculées à par-

tir de la caractéristique de réglage (Fig.7.3). La divergence constatée pour la limite inférieure et U_i supérieure à 0,3V peut être attribuée au mauvais blocage de l'interrupteur.

Notons que ce domaine d'entraînement réel est forcément plus petit que la valeur D_e calculée en admettant une caractéristique de réglage linéaire.

7.7 Limite de stabilité

On détermine la limite de stabilité du système en augmentant l'amplitude de U_i jusqu'à l'apparition de petites oscillations permanentes de la phase autour de sa valeur d'équilibre. La mesure de la valeur limite de U_i permet de calculer $(KT\epsilon)_{\max}$ en fonction de T/τ_d en appliquant les relations 2.10, 2.58 et 3.14.

Les points obtenus pour

$$\begin{aligned} b &= 1 & T &= 0,2 \text{ s} & \varphi_0 &\approx 0 & N &= 100 \\ C &= 10 \text{ nF} & R_S &= 100 \text{ K}\Omega & \text{(donc } R &= 135 \text{ K}\Omega \text{ et } \tau &= 4,1 \text{ s)} \end{aligned}$$

et pour plusieurs valeurs de R' , sont reportés sur la figure 3.4 représentant les limites théoriques. La correspondance est satisfaisante compte tenu de la difficulté de déterminer la valeur critique de U_i .

7.8 Réponse indicielle

On mesure la réponse indicielle du système à l'aide de l'ensemble de la figure 7.8

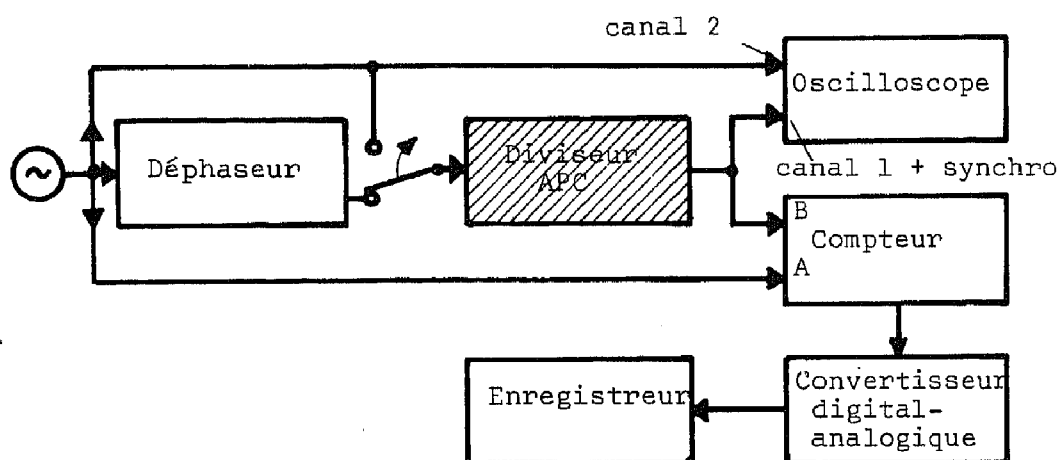


Fig. 7.8 Mesure de la réponse à un saut de phase

Une position du compteur permet de mesurer le temps s'écoulant entre l'impulsion d'échantillonnage en B et le signal de référence en A, dont les variations sont proportionnelles à celles de la phase

Les valeurs numériques utilisées:

$$\begin{array}{llll} C = C' = 22 \text{ nF} & R_s = 0 & R' = 12 \text{ M}\Omega & \\ N = 15 & U_i = 0,3 \text{ V} & T = 0,2 \text{ s} & \varphi_0 \approx 0 \end{array}$$

correspondent aux paramètres fondamentaux

$$b = 1 \quad T/\tau_d = 1,5 \quad P = 0,8$$

Après normalisation à l'écart de phase initial de $\pi/10$ environ, les points mesurés ont été reportés sur la courbe de la figure 3.6 calculée pour des valeurs de paramètres à peu près identiques, à laquelle ils correspondent bien.

7.9 Saut de phase maximum

Les valeurs admissibles d'un saut de phase sont mesurées à l'aide de l'ensemble de la figure 7.8 (sans utiliser le système de comptage).

Les valeurs numériques utilisées:

$$\begin{array}{lll} C = C' = 22 \text{ nF} & R_s = 226 \text{ K}\Omega & R' = 12,6 \text{ M}\Omega \\ N = 100 & U_i = 0,3 \text{ V} & T = 0,2 \text{ s (pour } \varphi_0 \approx 0) \end{array}$$

correspondent aux paramètres fondamentaux

$$b = 1 \quad T/\tau_d = 1,4 \quad P_m = 0,8$$

Pour varier l'angle d'équilibre φ_0 , on change la fréquence d'entrée; la fréquence de sortie suit, et il s'ensuit une variation de T , T/τ_d et P_m qui diffèrent jusqu'à 16% des valeurs ci-dessus suivant l'angle φ_0 utilisé pour les mesures.

Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 4.1: les cercles vides correspondent à des sauts de phase provoquant le décrochage alors que les cercles pleins correspondent à des sauts de phase suivis d'un retour à l'équilibre. Ces points correspondent assez bien à la courbe limite théorique No 2.

7.10 Saut d'amplitude maximum

L'effet d'un saut d'amplitude du signal d'entrée est mesuré à l'aide de l'ensemble de la figure 7.9

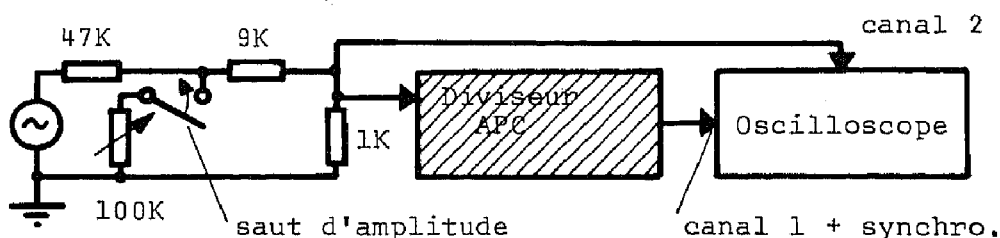


Fig. 7.9 Mesure de l'effet d'un saut d'amplitude

Les résultats obtenus avec les paramètres donnés sous 7.9 (amplitude avant le saut $U_i = 0,3\text{V}$) sont reportés sur la figure 4.4. La correspondance avec la limite calculée est satisfaisante.

7.11 Bruit

Les mesures des fluctuations de phase sont effectuées à l'aide de l'ensemble de la figure 7.10.

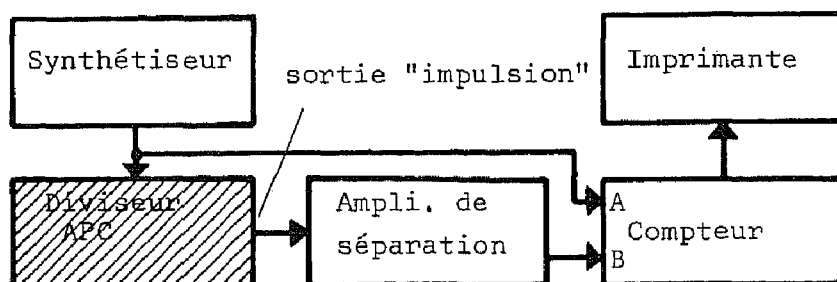


Fig. 7.10 Ensemble de mesure du bruit

Le synthétiseur de fréquence délivre un signal d'entrée de grande stabilité dont les fluctuations de phase sont négligeables.

Le bruit propre du système de mesure, contrôlé en synchronisant le multivibrateur par injection d'un signal de 10KHz fourni par ce synthétiseur, représente une fluctuation de $1\mu s$ au maximum, qui correspond à la quantification opérée par le compteur.

Le bruit de la boucle ouverte est mesuré selon le principe décrit au chapitre 6.7, en enregistrant 1 période sur 3 pendant 300 périodes.

Pour $U_A = 1,35V$, $\theta = 20^\circ C$ et $U_i = 0$, on obtient:

$$\sigma_{\Delta T}^2 = \psi_{\Delta T}(0) = 22 \mu s^2$$

$$\psi_{\Delta T}(1) = -10,8 \mu s^2$$

$$\psi_{\Delta T}(2) = 1,8 \mu s^2$$

En comparant avec les résultats théoriques dérivés dans l'appendice 2, on peut conclure que la suite des périodes T_n (en boucle ouverte) n'est pratiquement pas corrélée. Ses valeurs successives sont réparties statistiquement autour de la valeur moyenne \bar{T} avec une variance

$$\sigma_T^2 = (T/2\pi N)^2 \sigma_{\Delta x}^2 = 11 \mu s^2$$

qui correspond à un écart-type relatif

$$\sigma_T/T = 1,65.10^{-5}$$

légèrement plus élevé que celui du multivibrateur seul; l'étage amplificateur de courant T_1 représente en effet une source de bruit additionnelle.

On obtient le bruit du système bouclé en mesurant les fluctuations du temps Δt s'écoulant entre l'impulsion d'échantillonnage en B et le signal de référence en A, proportionnelles aux fluctuations de la phase:

$$\sigma_{\Delta t}^2 = (T/2\pi N)^2 \sigma_y^2$$

Ces mesures ont été effectuées avec 100 échantillons pris une période sur deux, pour plusieurs valeurs de R' (donc de T/τ_d) et $\varphi_0 = 0$, les autres paramètres étant les mêmes que pour la mesure des sauts de phase maximum, au chapitre 7.9. Les résultats obtenus après calcul des variances sont représentés à la figure 7.11

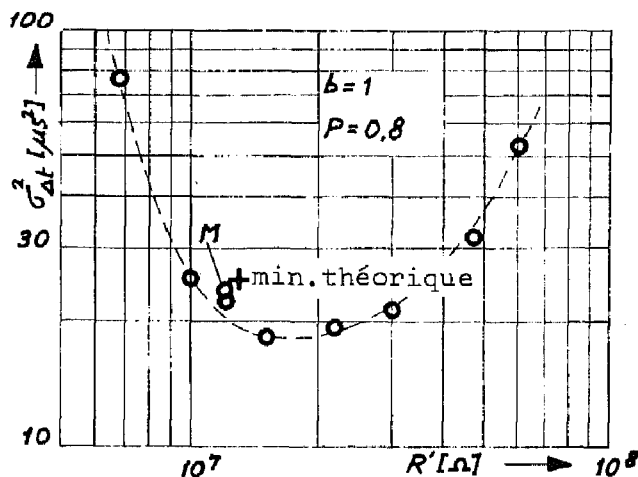


Fig. 7.11 Bruit du système bouclé

Le minimum théorique, calculé pour la variance en boucle ouverte de $11\mu s^2$ à partir des relations 2.39 et 3.14, et de la figure 3.5, est représenté par une croix sur la même figure. L'écart constaté peut être attribué au manque de précision des différents paramètres et des mesures statistiques elles-mêmes (le nombre d'échantillons est faible), ainsi qu'au fait

que le bruit en boucle ouverte n'est pas nécessairement parfaitement non autocorrélé.

Les points mesurés correspondent, avec la valeur $N = 100$ utilisée, à un écart-type de phase suffisamment faible ($\sigma_y = 0,028$ rad. au maximum) pour que l'approximation linéaire soit valable.

On a encore calculé quelques termes de la suite d'autocorrélation correspondant au point noté M sur la figure 7.11. Après normalisation à la variance, les résultats obtenus ont été reportés sur la figure 3.7 représentant la suite théorique. La correspondance ici encore n'est pas parfaite; on retrouve cependant le caractère oscillant de la suite, ainsi que sa périodicité approximative.

7.12 Probabilité de décrochage

On détermine la probabilité de décrochage p au cours d'une période d'échantillonnage en effectuant une statistique du temps avant décrochage. Afin de réduire la durée des mesures, on travaille à bruit de phase élevé en choisissant un grand rapport de division et en évitant de donner à R' sa valeur optimale. Avec

$$N = 2000 \quad C = C' = 0,15 \mu F \quad R_s = 310 K\Omega$$

$$U_i = 0,3 V \quad (U'_i = 0,137 V) \quad \varphi_0 \approx -\pi/30$$

la valeur optimale de R' serait $1,8 M\Omega$

En prenant $R' = 10 M\Omega$, on a mesuré 26 fois le temps s'écoulant jusqu'au décrochage à partir d'un instant choisi au moins 10 secondes après la mise en phase, afin d'éliminer l'influence des conditions initiales. Chaque mesure correspond à un point sur la figure 7.12a

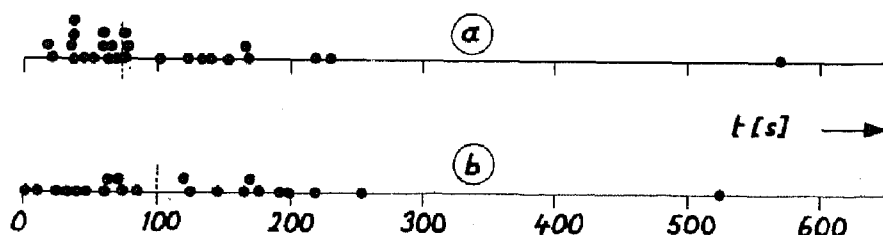


Fig. 7.12 Temps avant décrochage

La moitié des décrochages se sont produits avant 73 s, donc avant $n_p = 365$ périodes. La relation 4.44 donne alors

$$p = 1,9 \cdot 10^{-3}$$

On a également mesuré l'écart-type des fluctuations de phase (100 échantillons)

$$\sigma_y = 0,51 \text{ rad.}$$

Une deuxième mesure effectuée dans les mêmes conditions, mais avec $R' = 15 M\Omega$ a donné les résultats représentés à la figure 7.12b, qui correspondent à

$$p = 1,4 \cdot 10^{-3} \quad \text{pour} \quad \sigma_y = 0,48 \text{ rad.}$$

Notons qu'on obtient deux valeurs de σ_y très voisines pour deux valeurs de R' différentes et éloignées de l'optimum: les deux groupes de mesures ont été effectués à quelques jours d'intervalle et le bruit n'est pas parfaitement stationnaire.

Ces deux résultats sont reportés sur la figure 4.10 représentant la probabilité calculée. Ils tombent très près de la courbe valable lorsque l'angle d'équilibre φ_0 est voisin de zéro. On peut en conclure que ces courbes théoriques, calculées à partir d'une schématisation grossière du système, donnent une bonne indication de l'ordre de grandeur de la probabilité p .

7.13 Exemple de dimensionnement final du diviseur

L'examen de la figure 3.5 ainsi que des relations 3.39 et 3.40 montre que le choix des paramètres b et P est dicté par un compromis entre la réduction des fluctuations de phase et celle de la constante de temps de réponse à une rampe de fréquence τ_r . Dans certains cas, la valeur maximum de b peut être limitée par la nécessité de maintenir la capacité C' au-dessous d'une valeur limite.

Une réduction de P au-dessous de quelques dixièmes entraîne une augmentation de τ_r sans offrir la possibilité de rédui-

re le bruit de façon importante .

Prenons $P = 1,0$

Le bruit minimum sera atteint avec

$$\sum h_n^2 = 1,8$$

pour $b = 3$ et $T/\tau_d = 4$

On a mesuré des variations de fréquence propre de 6,3% entre 0 et 40°C et de 1,7% pour une variation de tension d'alimentation de 100mV.

En admettant une erreur de réglage de $\pm 1\%$, on obtient un écart maximum de fréquence

$$\left| (\omega_0 - \omega_{00}) / \omega_{00} \right|_{\max.} = 5 \%$$

Au vu de la figure 7.7, on limitera l'amplitude d'entrée à

$$U_i = 0,3V$$

En admettant qu'on puisse compter sur une valeur de D_e voisine de 0,3, on peut calculer par les relations 2.48 et 2.52 la phase d'équilibre maximum

$$\left| \varphi_0 \right|_{\max.} = \text{Arcsin} \left| \frac{2(\omega_0 - \omega_{00})}{D_e \omega_{00}} \right|_{\max.} \approx \pi/10$$

Le cosinus de φ_0 est alors toujours voisin de 1, ce qui permet d'optimiser le système pour $\varphi_0 = 0$, c'est-à-dire $P = P_m$ et $K = K_m$.

La figure 4.10 montre que l'écart-type σ_y du bruit de la boucle fermée doit être maintenu au-dessous de 0,15 radians pour assurer une probabilité de décrochage négligeable.

En admettant que les fluctuations de phase du signal d'entrée sont négligeables, les relations 2.36 et 2.39 donnent

$$\sigma_y = 2\pi N \left(\sum_0^{\infty} h_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_T / T$$

En utilisant la valeur mesurée $\sigma_T / T = 1,65 \cdot 10^{-5}$, on obtient $N_{\max} = 1080$.

On se contentera de prendre $N = 1000$

Sachant que $T_e = 65\mu s$, $k = 22,7V^{-1}s^{-1}$ et $T = 0,2s$, on calcule alors à l'aide des relations 1.6, 2.58, 3.39 et 3.40

$$K_m = 5670 \text{ rad/s} \quad \tau = 56,7 \text{ s} \quad \tau_r = 1260 \text{ s}$$

Un certain nombre de courants de fuite tendent à perturber la tension de réglage u_C . Leur somme I_f , à laquelle contribuent surtout le courant inverse drain-substrat du transistor interrupteur T_2 ainsi que son courant de drain à l'état bloqué, provoque à travers la résistance équivalente τ/C du filtre continu une chute de tension

$$\Delta u = I_f \tau / C$$

qui doit être négligeable.

Le courant I_f ne dépassant pas 20pA à 40°C, on peut choisir

$$C = 100nF$$

qui donne une perturbation ne dépassant pas 12mV.

D'après la figure 7.6, on obtient la valeur de τ désirée pour

$$R_s = 150K\Omega$$

La valeur de $b = 3$ conduit à

$$C' = 330nF$$

et la définition 3.14 de τ_d donne, pour $T/\tau_d = 4$

$$R' = 680K\Omega$$

La relation 2.52 donne

$$D_e = 0,36$$

Le domaine d'entraînement réel est plus faible à cause de la non-linéarité de la caractéristique de réglage.

Une variation de température de 0 à 40°C provoque une variation de 6,3% de ω_{00} . La figure 4.7 permet de calculer la condition pour que le système supporte un saut instantané de température ambiante de 0 à 40°C, en l'absence d'autres perturbations et en supposant la phase d'équilibre φ_{0i} proche de 0:

$$\tau_{th} > 109 \text{ s}$$

8. CONCLUSIONS

Le facteur principal limitant le rapport N d'un diviseur de fréquence par asservissement de phase est constitué par les fluctuations aléatoires (ou "jitter") de la période de l'oscillateur asservi. Si ce dernier est un circuit du type multivibrateur (bascule astable), ces fluctuations ne sont pas corrélées dans le temps; l'écart-type de la répartition de leur amplitude relative est inversement proportionnel à la tension d'alimentation; il est, en première approximation, indépendant des capacités parasites et des capacités de relaxation lorsque le bruit de scintillement des composants prédomine (relation 5.115).

Ces écarts de période correspondent à un bruit injecté dans la boucle d'asservissement sous forme de sauts de phase non corrélés Δx_n dont l'écart-type $\sigma_{\Delta x}$ est proportionnel au rapport de division N (relation 2.35). Ce signal perturbateur provoque des écarts y_n de la phase par rapport à sa valeur moyenne (écart-type σ_y), dont la conséquence est qu'il existe à chaque période une certaine probabilité pour que le diviseur décroche (et perde la "consigne" de division).

Une estimation de cette probabilité à l'aide d'un modèle simplifié du système a été vérifiée expérimentalement pour un niveau de bruit élevé; on admet qu'elle est encore valable lorsque le bruit est faible (figure 4.10).

Si on se contente d'un système du deuxième ordre (comprenant un filtre passe-bas du premier ordre), on obtient, après optimisation sur la base d'une approximation linéaire, un écart-type résultant σ_y proportionnel à $N^{1/2}$ pour un écart-type $\sigma_{\Delta x}$ des sauts perturbateurs donné (relation 3.1), donc proportionnel à $N^{3/2}$ pour un "jitter" du multivibrateur donné.

En introduisant un filtre du deuxième ordre, conduisant à une boucle du troisième ordre, on peut faire tendre σ_y vers $\sigma_{\Delta x}$ (figure 3.5) et rendre ainsi σ_y proportionnel à N seulement pour un "jitter" donné; ceci permet d'atteindre des rapports de division passablement plus élevés.

Une autre limitation à N est donnée par la rapidité de réponse du système à une variation de fréquence, comme celle provoquée par une variation de la température ambiante. La constante de temps τ_p , caractérisant cette réponse, est proportionnelle à la fois à la période de sortie et au rapport de division N (relation 3.39), donc à N^2 si la fréquence d'entrée est donnée. Elle augmente en outre lorsque on fait tendre σ_y vers son minimum asymptotique (figure 3.5).

L'influence des perturbations à considérer à l'entrée du diviseur (sauts isolés de l'amplitude ou de la phase du signal d'entrée) est indépendante du rapport de division. Le système ne décroche jamais lors d'une augmentation d'amplitude (figure 4.4); il peut supporter un saut de phase isolé quelconque si la phase d'équilibre est petite, c'est-à-dire s'il travaille suffisamment près de sa fréquence libre (figure 4.1). Le saut admissible est ensuite limité pour tendre vers zéro lorsque cette phase tend vers $\pm\pi/2$, limites du domaine d'entraînement.

Le système est entièrement défini par 3 paramètres sans dimension auxquels s'ajoute la période de sortie. L'un de ces paramètres doit être choisi en fonction d'un compromis entre le bruit et la rapidité de réaction; les deux autres sont alors donnés par des critères d'optimisation (figure 3.5).

La réalisation pratique utilisée pour vérifier les différents résultats théoriques (figure 7.1) montre qu'il est possible d'obtenir un rapport de division N de 1000 en conservant une probabilité de décrochage très faible entre 0 et 40°C et pour une tension d'alimentation variant de 1,3 à 1,4V, ceci à l'aide d'un circuit comprenant moins de 30 éléments non critiques, réalisables sauf quelques capacités, sous forme de circuit intégré et consommant quelques micro-ampères sous 1,35volts (application possible à une montre-bracelet).

Cette valeur de N augmenterait proportionnellement à la tension d'alimentation et pourrait être encore accrue en réalisant certaines parties du circuit à l'aide d'éléments à faible bruit.

Appendice 1

La relation 2.1 permet d'écrire

$$f(z) = H(z)H(z^{-1}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n\right)$$

En effectuant les produits avant les sommes, on obtient

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

développement de $f(z)$ en série de Laurent [16,p.143] autour de l'origine $z=0$, avec

$$a_{\pm k} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n h_{n+k}$$

La fonction de transfert $G(z)$ de la boucle ouverte possède 1 pôle en $z=1$, qui correspond à un zéro de la fonction du système bouclé

$$W(z) = 1/(1+G(z))$$

De plus, le système étant stable, tous les pôles de $W(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité.

Donc tous les pôles de la transformée de la réponse à un saut unité

$$H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot W(z)$$

sont également à l'intérieur du cercle unité. La fonction $f(z)$ est par conséquent analytique sur le cercle unité, et les coefficients a_k de la série sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{cercle unité}} f(z) z^{-(k+1)} dz$$

D'où, puisque $a_k = a_{-k}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n h_{n+k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{cercle unité}} H(z) H(z^{-1}) z^{k-1} dz \quad 2.40$$

Appendice 2

Si la suite des écarts de période $T_n - \bar{T}$ n'est pas corrélée, sa séquence d'autocorrélation est

$$\psi_T(k) = \begin{cases} \sigma_T^2 & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0 \end{cases}$$

Soit la suite ΔT_n telle que

$$\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$$

Sa séquence d'autocorrélation est, par définition

$$\psi_{\Delta T}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} (T_n - T_{n-1})(T_{n+k} - T_{n-1+k})$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \psi_{\Delta T}(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} ((T_n - \bar{T}) - (T_{n-1} - \bar{T}))((T_{n+k} - \bar{T}) - (T_{n-1+k} - \bar{T})) \\ &= 2\psi_T(k) - \psi_T(k+1) - \psi_T(k-1) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta T}^2 &= \psi_{\Delta T}(0) = 2\sigma_T^2 \\ \psi_{\Delta T}(\pm 1) &= -\sigma_T^2 \\ \psi_{\Delta T}(k) &= 0 \text{ pour } |k| > 1 \end{aligned}$$

Glossaire des symboles principaux

		page de définition
a	rapport entre R' et r/C	27,34
b	rapport entre C' et C	27
C	capacité de maintien	2
C'	capacité du réseau correcteur	28
C_L	capacité de liaison du multivibrateur	57
d		29
D_c	domaine de capture	19
D_e	domaine d'entraînement	17
e	charge élémentaire	
f	fréquence (même indice que ω correspondante)	
g_e/g_c	conductance d'émetteur/de collecteur	61
g_f/g_r	transconductance directe/inverse	61
$G(z)$	fonction de transfert de la boucle ouverte	
h_n	réponse indicielle	
$i_B/i_E/i_C$	courant de base/d'émetteur/de collecteur	57,60
I_{CM}/I_{BM}	source de courant au collecteur/à la base	63
I_{EO}/I_{CO}	courant inverse d'émetteur/de collecteur	60
I_{ES}/I_{CS}	courant caractéristique d'émetteur/de collecteur	59
k	facteur de réglage du VCO	1
K/K_m		7
N	rapport de division	1
P/P_m		31,35
Q		31
r	facteur de rétention	6
R	résistance du filtre du premier ordre	5
R'	résistance du réseau correcteur	28
R_c/R_b	résistance de collecteur/de base	57
t	temps	
t_c/t_d	temps de commutation/de retard	78,77
T	période (même indice que ω correspondante)	1
T_e	durée d'échantillonnage	1
u/u_0	tension de sortie du filtre/à l'équilibre	1, 2
u_R	tension de réglage du multivibrateur	57

U_A	tension d'alimentation	57,96
U_i	amplitude du signal d'entrée	1
U_i'	valeur réduite de U_i	4
v_C/v_E	tension de la jonction de collecteur/d'émetteur	57
V_1, V_2, V_3	tensions caractéristiques du multivibrateur	58,65
V_B	tension de Boltzmann	60
VCO	oscillateur réglé par une tension	
$W(z)$	fonction de transfert du système bouclé	9
x_n	petits écarts de phase perturbateurs	9
y_n	petits écarts de phase résultants	9
α_F/α_R	gain en base commune/gain inverse	60
β_F/β_R	gain en émetteur commun/gain inverse	87
Δx_n	petits sauts de phase perturbateurs	14
ε	complément à 1 du facteur de rétention	18
θ	température	
σ_x	écart-type de x_n	
τ	const. de temps du filtre continu du 1er ordre	16,34
τ_C/τ_B	const. de temps du circuit de collecteur/de base	58
τ_d		29
τ_r	const. de temps de réaction	28
τ_{th}	const. de temps thermique	47
φ/φ_0	phase d'échantillonnage/à l'équilibre	3
$\psi_x(k)$	séquence d'autocorrélation de x_n	
ω/ω_0	pulsation de sortie/à l'équilibre	1, 2
ω_{00}	pulsation de sortie du système libre	1
ω_i	pulsation du signal d'entrée	1

De façon générale:

$X(s)$	transformée de Laplace de $x(t)$
$X(z)$	transformée en z de $x(nT) = x_n$

Pour les courants et tensions:

Lettre majuscule \rightarrow grandeur constante (U_A, U_i , etc)
Lettre minuscule \rightarrow grandeur variable (i_E, u_R , etc)
indice minuscule \rightarrow variation autour d'un point de repos (i_e, v_c , etc)

Références

1. A.P. Speiser, "Impulsschaltungen", Springer-Verlag 1963, Chap. 17 "Zähler".
2. D. Mange, "Diviseurs de fréquence en anneau DCTL et TTL à faible consommation de puissance" Communications AGEN, No 6, Nov. 1966, pp 9-16.
3. J. Groskowski, "Frequency division", Proc. IRE, Vol.18, No 11 Nov. 1930, pp 1960-1970.
4. K. Schlichting, "Untersuchungen an harmonischen Frequenzteilern zur Ermittlung der Voraussetzungen für die Erzielung hoher Teilerhältnisse und grosser Mitnahmebereiche bei hohen Frequenzen". Z.f. angew. Physik einschl. Nukleonik, IX Band, Heft 9, 1957, pp. 458-464.
5. P. Thiessen, "Beitrag zum Problem der Frequenzteilung", NWDR Techn Hausmitt. Jahrgang 7, 1955, pp.77-87 et 101-110.
6. P.R. Scott, "A stabilized locked-oscillator frequency divider", Proc. IRE, Vol. 48, Febr. 1960, pp. 192-200.
7. B. Chance et al. "Waveforms", McGraw-Hill, 1949.
8. L. Strauss, "Wave generation and shaping", McGraw-Hill, 1960 Sec. 5.5.
9. R.L. Miller, "Fractional frequency generators utilizing regenerative modulation", Proc. IRE, Vol.27 (1939) pp.446-457.
10. J. Engdahl, "Les circuits de division électronique de fréquence et leur application aux mesures du temps", Annales Françaises de Chronométrie, 1er trimestre 1961.
11. E. Vittoz, P. Gutknecht, "Un diviseur de fréquence et sa réalisation microminiaturisée", Actes du Congrès int. de Chronométrie, Lausanne, juin 1964, pp. 515-525.
12. F.M. Gardner, "Phaselock techniques", Wiley 1966.
13. T.J. Rey, "APC with pulse reference", M.I.T. Lincoln Lab. Group, Lexington, Mass., rept. 47G-0019, November 1960.

14. Yu. B. Nesvizhskiy, "Pulse-phase locked automatic frequency control", Telecommunications and Radio Engineering, Part II Radio Eng., Vol. 20, No 9, Sept. 1965, pp. 95-102.
15. J.T. Tou, "Digital and sampled data control systems", McGraw-Hill 1959.
16. M.R. Spiegel, "Complex variables", Schaum, New York, 1964.
17. A. Giger, "Ein Grenzproblem einer technisch wichtigen nicht-linearen Differentialgleichung", ZAMP, Vol.VII, 1956, pp. 121-129.
18. N. Minorsky, "Nonlinear oscillations", Van Nostrand, 1962, Chap. 8.
19. G. Boole, " A Treatise on the calculus of finite differences", Dover 1960.
20. A.J. Viterbi, "Phase-locked loop dynamics in the presence of noise by Fokker-Planck techniques", Proc. IRE, Vol.51, No 12, Dec. 1963, pp. 1737-1753.
21. R.W. Sannemann, J.R. Rowbotham, "Unlock characteristics of the optimum type II phase-locked loop", Trans. IEEE, ANE-11, pp. 15-24, March 1964.
22. B.I. Shakhtarin, Yu. Shchepkin, "Experimental study of the action of fluctuation noise on a phase-locked AFC system", Telecommunications and Radio Engineering, Part I Telecom., Vol. 20, 1966, No 9, pp. 15-19.
23. D.A. Bell, "Statistical methods in electrical engineering", Chapman and Hall Ltd, 1953, pp. 36 et 163.
24. Ch. Blanc, "Calcul différentiel et intégral", EPUL, 1964, p. 177.
25. J.J. Ebers, J.L. Moll, "Large-signal behaviour of junction transistors", Proc. IRE, Vol. , pp. 1761-1772, Dec. 1954.
26. P.E. Gray et al., "Physical electronics and circuit models of transistors", Semiconductor Electronics Education Committee, Vol. 2, Wiley 1964, p.180.

27. E.R. Hauri, A.E. Bachmann, "Grundlagen und Anwendungen der Transistoren", Direction Générale des PTT, Berne 1962, p.99.
28. E. Goursat, "Cours d'analyse mathématique", Tome II, p.465, Gauthiers-Villars, Paris 1911.
29. E. Jahnke, F. Emde, "Tables of functions", Dover, 1945.
30. R.D. Thornton et al. "Characteristics and limitations of transistors", Semiconductor Electronics Education Committee, Vol. 4, pp. 147 et suivantes, Wiley 1964.
31. A. van der Ziel, "Noise", p. 209, Prentice Hall, 1959.

